คณะวิศวกรรมศาสตร์

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนคร

การสร้างและหาประสิทธิภาพบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน เรื่องวิชา กลศาสตร์วัสดุ บทที่ 3-6

Creating and Evaluating the Effectiveness of Computer Assisted Instruction Program Subject Engineering Materials Chapter 3-6.

ผู้ช่วยศาสตราจารย์ประเสริฐ วิโรจน์ชีวัน

Assist. Prof. Prasert Wirotcheewan

งานวิจัยนี้เป็นส่วนหนึ่งในการดำเนินงานของ คณะวิศวกรรมศาสตร์

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนคร

ได้รับการอุดหนุนงบประมาณในการดำเนินการ

ปี พ.ศ. 2553

บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อสร้างและหาประสิทธิภาพบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนเรื่อง การสร้างและหาประสิทธิภาพบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน เรื่องวิชากลศาสตร์วัสดุบทที่ 3-6 ให้ได้ตามเกณฑ์มาตรฐาน และวิเคราะห์ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังจากเรียนด้วยบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย เป็นนักศึกษาระดับปริญญาตรี คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนคร จำนวน 20 คน ผู้วิจัยทำการทดลองโดยให้กลุ่มตัวอย่างทำแบบทดสอบก่อนเรียน แล้วให้ทำการเรียนโดยใช้บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนเรื่องการสร้างและหาประสิทธิภาพบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น หลังจากนั้นให้ทำแบบทดสอบหลังเรียน แล้วนำมาคำนวณหาประสิทธิภาพของบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน และวิเคราะห์ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังจากเรียนด้วยบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

ผลการวิจัยครั้งนี้ปรากฏว่า ประสิทธิภาพของบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นได้ตามเกณฑ์มาตรฐาน และหลังจากเรียนด้วยบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน นักศึกษามีความรู้เพิ่มมากขึ้นอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ประเสริฐ วิโรจน์ชีวัน)

ผู้วิจัย

ABSTRACT

The purposes of the research were to create and efficiency validation of computer Assisted for the courses of practiced to reading Creating and Evaluating the Effectiveness of Computer Assisted Instruction Program Subject Engineering Materials Chapter 3-6 based standard and analyses the leaning achievement of the student after by using computer assisted instruction .

The subjects in the study were 20. Diploma students enrolled in Rajamangala University of Technology Phra Nakhon. The Researcher using the experiment by let the students do until test before class, And then study by using computer assisted instruction focused on practiced to basic turning . After that let students do the unit test again at the class and calculate to find out the efficiency of the computer assisted instruction. And analyzed the learning achievement of students after study.

The research result revealed that the efficiency of the computer assisted Instruction was efficient in standard, Moreover , after learning achievement at significant level of 0.05.

(Assist. Prof. Prasert Wirotcheewan)

RESEARCHER

สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	ข
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	ค
สารบัญ	ง
สารบัญตาราง	ช
สารบัญภาพ	ซ
บทนำ	1
- ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา	1
- วัตถุประสงค์ของการวิจัย	2
- ขอบเขตของการวิจัย	2
- ระเบียบวิธีวิจัยที่ใช้	2
- ประชากรและกลุ่มตัวอย่าง	2
- เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย	3
- สมมติฐานการวิจัย	5
- ประโยชน์ที่ได้รับจากการวิจัย	5
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง	6
- การวิเคราะห์เนื้อหาวิชา	6
- การสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน	7
- การสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน	8
- งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน	9
วิธีการวิจัย	11
- ระเบียบวิธีวิจัยที่ใช้	11
- กลุ่มตัวอย่าง	11
- เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย	11
- การดำเนินการทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูล	13
- สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล	14
ผลของการวิจัย	17
- ผลการวิเคราะห์ข้อมูล	17
- สรุปผลการวิเคราะห์ข้อมูล	18

สารบัญ (ต่อ)

หน้า

สรุปผลการวิจัย อภิปรายผลและข้อเสนอแนะ 19

- สรุปผลการวิจัย 19

บรรณานุกรม 20

ภาคผนวก 22

- รายนามผู้เชี่ยวชาญตรวจสื่อการสอน และหนังสือขอเชิญเป็นผู้เชี่ยวชาญตรวจสื่อการสอน 23
- ขอบข่ายของเนื้อหาวิชา 25
- แบบประเมินสื่อการสอนด้านเนื้อหา 26
- แบบประเมินสื่อการสอนด้านเทคนิคการผลิตสื่อ 27
- เกณฑ์การประเมินสื่อการสอน 28
- ผลการประเมินสื่อการสอนจากผู้เชี่ยวชาญ ด้านเนื้อหา 29
- ผลการประเมินสื่อการสอนจากผู้เชี่ยวชาญ ด้านเทคนิคการผลิตสื่อ 30
- ผลการวิเคราะห์ความเที่ยงตรงของข้อสอบกับวัตถุประสงค์ 31
- แสดงผลการประเมินหาค่าความยากง่ายของแบบทดสอบ ฯ 32
- แสดงผลการประเมินหาค่าอำนาจจำแนกของแบบทดสอบ ฯ 34
- แสดงค่า T-test ของแบบทดสอบ 42
- แสดงผลการประเมินหาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ ฯ 43
- ผลการคำนวณวิเคราะห์หาประสิทธิภาพของบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน 44
- ลักษณะรายวิชา 45
- แบบทดสอบ 46
- บทดำเนินเรื่อง 52

สารบัญตาราง

ตารางที่ **หน้า**

1. แสดงการทดลองที่มีกลุ่มตัวอย่างหนึ่งกลุ่ม ทำการทดลองก่อนและหลังการทดลองทันที 11
2. แสดงค่าความคิดเห็นของบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนจากผู้เชี่ยวชาญ 17
3. แสดงค่าประเมินสื่อการสอนจากผู้เชี่ยวชาญ ด้านเนื้อหา 29
4. แสดงค่าประเมินสื่อการสอนจากผู้เชี่ยวชาญ ด้านเทคนิคการผลิตสื่อ 30
5. แสดงการวิเคราะห์ความเที่ยงตรงข้อแบบทดสอบตามวัตถุประสงค์ 31
6. แสดงผลการประเมินค่าความยากง่ายของแบบทดสอบ 32
7. แสดงการประเมินค่าอำนาจจำแนกของแบบทดสอบ 35
8. แสดงหาค่าอำนาจจำแนกของแบบทดสอบ เรียงลำดับคะแนนจากมากไปหาน้อย กลุ่มได้คะแนนสูง 36
9. แสดงหาค่าอำนาจจำแนกของแบบทดสอบ เรียงลำดับคะแนนจากมากไปหาน้อย กลุ่มได้คะแนนน้อย 37
10. แสดงผลค่าอำนาจจำแนกของแบบทดสอบ 38
11. แสดงผลการประเมินค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ 39
12. แสดงค่า T-test ของแบบทดสอบ 41

สารบัญภาพ

ภาพที่ **หน้า**

1. แสดงขั้นตอนการสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน 3
2. แสดงขั้นตอนการทดลองและการวิเคราะห์ข้อมูล 4

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนคร

บทนำ

ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา

การปฏิบัติอาชีพราชการครูสายการสอนหรือเป็นอาจารย์ผู้สอน เมื่อได้รับการสอบคัดเลือกแต่งตั้งให้มาปฏิบัติหน้าที่ ถ้าไม่มีประสบการณ์การสอนหรือไม่มีความรู้เชี่ยวชาญในเนื้อหาที่สอน ผู้สอนต้องศึกษาค้นคว้าหาความรู้ให้เข้าใจจัดเตรียมการสอนด้านเนื้อหาและอุปกรณ์สื่อการสอน ดังนั้นการสอนในวิชาเดิมหลายครั้งหลายภาคเรียน จะทำให้ผู้สอนมีความรู้อย่างเชี่ยวชาญและมีการพัฒนาทักษะการสอน นอกจากงานหน้าที่หลัก คือ การสอนและยังมีภาระหน้าที่อย่างอื่นอีก เช่นงานธุรการด้านต่างๆ หรือกิจกรรมต่าง ๆ ในหน่วยงานตามที่ได้รับมอบหมายจากผู้บริหาร นอกจากนี้สถานศึกษาในปัจจุบันยังมีนโยบายพัฒนาด้านอื่น ๆ เช่น การพัฒนาบุคลากร การดำเนินงานวิจัย การดำเนินงานโครงการต่างๆ ที่ตอบสนองความต้องการของชุมชนหรือองค์กรของรัฐ จากภาระงานหน้าที่ทั้งหมดของผู้สอนดังที่กล่าวมาต้องปฏิบัติควบคู่กับการสอนทำให้มีผลกระทบต่อหน้าที่หลัก คือ การสอนไม่มากหรือน้อยขึ้นอยู่กับการแก้ปัญหาของอาจารย์แต่ละท่าน

ปัจจุบันความเจริญทางเทคโนโลยี มีบทบาทต่อการพัฒนากิจการต่างๆมาก การนำเทคโนโลยีมาใช้พัฒนาสื่อการเรียนการสอนเป็นวิธีการที่อาจารย์ผู้สอนให้ความสนใจ มีการประดิษฐ์คิดค้นอุปกรณ์สื่อสารและสิ่งอำนวยความสะดวกในชีวิตประจำวันโดยเฉพาะอย่างยิ่งคือ “ คอมพิวเตอร์ ” และได้มีการนำมาใช้เพื่อการศึกษากันอย่างแพร่หลาย (กรมการศึกษานอกโรงเรียน , 2541 : 2)

คอมพิวเตอร์ช่วยสอนหมายถึง สื่อการเรียนการสอนทางคอมพิวเตอร์รูปแบบหนึ่งซึ่งใช้ความสามารถของคอมพิวเตอร์ในการสำเสนอสื่อประสม ได้แก่ ข้อความ ภาพนิ่ง แผนภูมิ กราฟ ภาพเคลื่อนไหว วีดีทัศน์และเสียง เพื่อถ่ายทอดเนื้อหาบทเรียน หรือองค์ความรู้ในลักษณะที่แตกต่างกันออกไปขึ้นอยู่กับธรรมชาติและโครงสร้างของเนื้อหา มีเป้าหมาย คือ ดึงดูดความสนใจ และกระตุ้นผู้เรียนให้เกิดความการต้องอยากเรียนรู้ ช่วยให้ผู้เรียนที่เรียนอ่อนสามารถใช้เวลานอกเวลาเรียนในการฝึกฝนทักษะและเพิ่มเติมความรู้ เพื่อที่จะปรับปรุงการเรียนของตนให้ทันผู้เรียนอื่นได้ ดังนั้นผู้สอนจึงสามารถนำคอมพิวเตอร์ช่วยสอน ไปใช้ในการสอนเสริมหรือสอนทบทวนการสอนปกติในชั้นเรียนได้ โดยที่ผู้สอนไม่จำเป็นต้องเสียเวลาในการสอนซ้ำกับผู้เรียนที่เรียนตามไม่ทันจัดการสอนเพิ่มเติม (ถนอมพร เลาหจรัสแสง , 2541 : 7 – 12)

ปัญหาของผู้ทำวิจัย คือการสอนวิชาที่มีนักศึกษาจำนวนตั้งแต่ 30-40 คน ต่อการสอน1 ครั้ง ลักษณะเนื้อหาวิชามีทฤษฎีและปฏิบัติ การสอนวิชาดังกล่าวจำเป็นต้องสอนสาธิตและมีทฤษฎีเข้ามาเกี่ยวข้อง สอนโดยการแบ่งนักศึกษาออกออกเป็นกลุ่มย่อย ๆ แล้วสอนสาธิตทุกกลุ่มจึงจะทำให้นักศึกษาได้รับความรู้ตามวัตถุประสงค์การสอนที่ตั้งไว้ จากลักษณะการสอนดังกล่าวอาจารย์ผู้สอนต้องเหนื่อยมากกว่าปกติที่สอนครั้งเดียว เพราะการสอนสาธิตครั้งเดียวทั้งห้อง อาจมีนักศึกษาบางคนที่ยังไม่เข้าใจเนื่องจากมองดูการสาธิตไม่เห็นชัดเจนและไม่กล้าถามก็ทำให้นักศึกษาดังกล่าวไม่สามารถปฏิบัติงานตามวัตถุประสงค์การสอนได้ ทำให้การฝึกปฏิบัติงานของนักศึกษามีผลสัมฤทธิ์ยังไม่ดี ด้วยเหตุผลที่กล่าวมาทั้งหมดนี้ทำให้ผู้วิจัยสนใจใช้บทเรียนคอมพิวเตอร์เป็นสื่อในการสอนเพื่อใช้แก้ปัญหาของผู้วิจัยในการสอนปัจจุบัน คือ ประกอบการสอนเป็นกลุ่มเล็กหรือกลุ่มใหญ่ สอนทบทวนนักศึกษาที่ยังไม่เข้าใจและบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยอาจารย์ใหม่ที่ยังไม่มีประสบการณ์หรือความเชี่ยวชาญในการสอนหรืออาจารย์ที่ได้รับมอบหมายให้มาสอนแทน เนื่องจาก

ผู้สอนประจำติดธุระราชการ เพื่อให้การเรียนการสอนดำเนินไปอย่างต่อเนื่องซึ่งจะเป็นประโยชน์ต่อการเรียนรู้การฝึกปฏิบัติงานของนักศึกษา

วัตถุประสงค์ของแผนงานวิจัย

1.เพื่อสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน เรื่องวิชากลศาสตร์วัสดุบทที่ 3-6

2.เพื่อหาประสิทธิภาพและเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนของบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน เรื่องวิชากลศาสตร์วัสดุบทที่ 3-6

ขอบเขตของโครงการวิจัย

1. เนื้อหาบทเรียนคอมพิวเตอร์ที่ผู้วิจัยอ้างถึงที่ใช้ทำเป็นสื่อในการสอนนี้ ใช้เนื้อหาวิชากลศาสตร์วิศวกรรม หลักสูตรวิศวกรรมศาสตร์บัณฑิต หลักสูตรปรับปรุงปี 2550 ที่ใช้ในการสอนของมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนคร คณะวิศวกรรมศาสตร์ ปีการศึกษา 2553

2. ลักษณะของบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน จะจัดทำเป็นโปรแกรมบรรจุลงในแผ่นดีวีดี หรือวีซีดี ผู้เรียนหรือผู้ใช้สื่อจะต้องนำแผ่นใส่ลงในเครื่องคอมพิวเตอร์ ซึ่งสามารถอ่านข้อมูลได้ จากนั้นโปรแกรมจะทำงานโดยอัตโนมัติแสดงภาพหน้าจอหลักให้ทราบ ผู้เรียนหรือผู้ใช้สามารถเลือกเนื้อหาที่ต้องการเรียนรู้ได้โดยการเลือกหัวข้อที่ต้องการ โปรแกรมจะแสดงเนื้อหาทั้งภาพและเสียงในเนื้อหานั้น ๆ เมื่อเรียนรู้จบ มีแบบทดสอบ 4 หัวเลือกให้ทำ เมื่อทำเสร็จทุกข้อ โปรแกรมจะบอกผู้เรียนว่าผ่านการทดสอบหรือไม่ โดยตั้งเกณฑ์ผ่าน 80 % ขณะการใช้งานบทเรียนผู้เรียนสามารถเลือกพักหยุดชั่วขณะ หรือออกจากโปรแกรมได้ลอดเวลา

3. ประชากรและกลุ่มตัวอย่างเป็นนักศึกษาระดับปริญญาตรีหลักสูตรของมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนคร คณะวิศวกรรมศาสตร์ ในปีการศึกษา 2553 โดยการเลือกตัวอย่างแบบเจาะจง

ในการทดลองครั้งนี้เป็นการวิจัยเชิงทดลอง (Experimental Research) เพื่อหาประสิทธิภาพบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่สร้างขึ้น และวิเคราะห์ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังจากเรียนด้วยบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน มีรายละเอียดการวิจัยดังนี้

1. ระเบียบวิธีวิจัยที่ใช้
2. ประชากรและกลุ่มตัวอย่าง
3. เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย
4. การดำเนินการทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูล
5. การวิเคราะห์ข้อมูลและสถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

ระเบียบวิธีวิจัยที่ใช้

การวิจัยครั้งนี้ใช้แบบแผนการวิจัยเชิงทดลอง (Experimental Research) โดยใช้แบบแผนการทดลองที่มีกลุ่มตัวอย่างหนึ่งกลุ่ม ทำการทดสอบก่อนและทดสอบหลังการทดลองทันที

(One – GroupPretest – Posttest Design

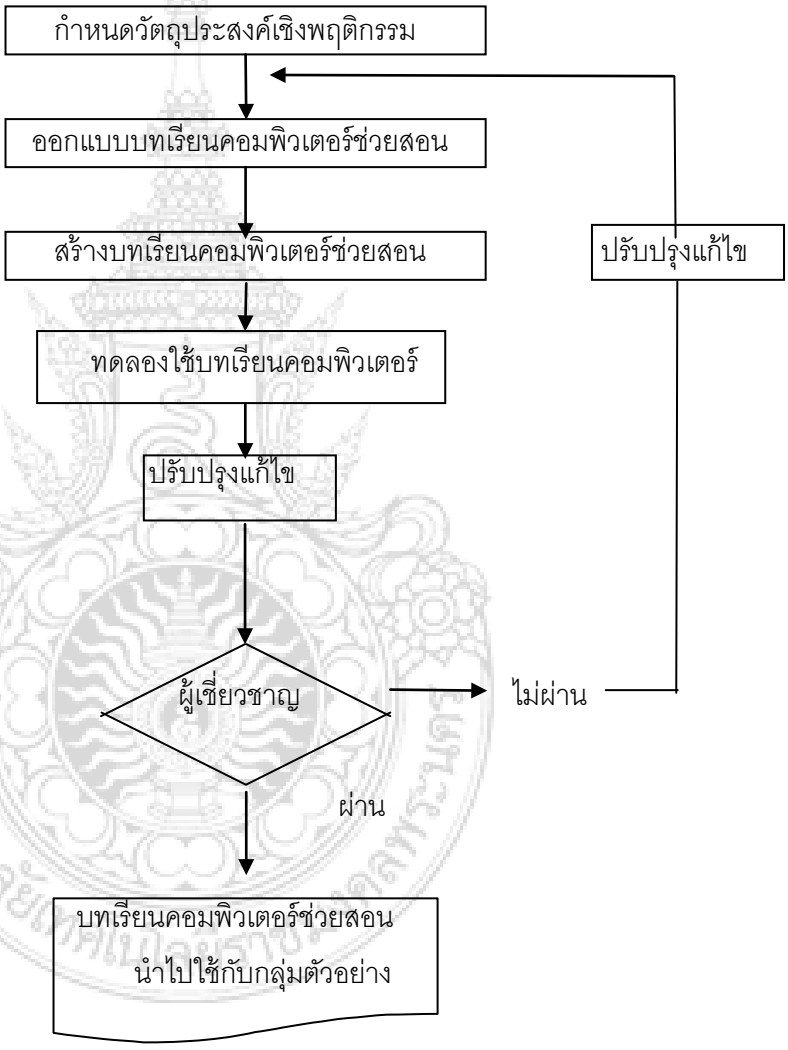
ประชากรและกลุ่มตัวอย่าง

1. ประชากร คือ นักศึกษาระดับปริญญาตรี สาขาวิชาช่างอุตสาหกรรมที่เปิดสอน ณ คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนคร

2. กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนักศึกษานักศึกษาระดับปริญญาตรี สาขาวิชาช่างอุตสาหกรรมคณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนคร ที่ลงทะเบียนเรียนในวิชาหรือเนื้อหาวิชาตรงกับหัวข้องานวิจัยของผู้วิจัย ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2553 โดยจะทำการสุ่มตัวอย่างแบบเจาะจงจำนวนนักศึกษาทั้งห้อง เพื่อนำมาทดลองและใช้บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนซึ่งมีอาจารย์ผู้สอนและผู้วิจัยควบคุม

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย คือ บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่สร้างขึ้น มีขั้นตอนการสร้างดังภาพที่ 1



ภาพที่ 1 แสดงขั้นตอนการสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

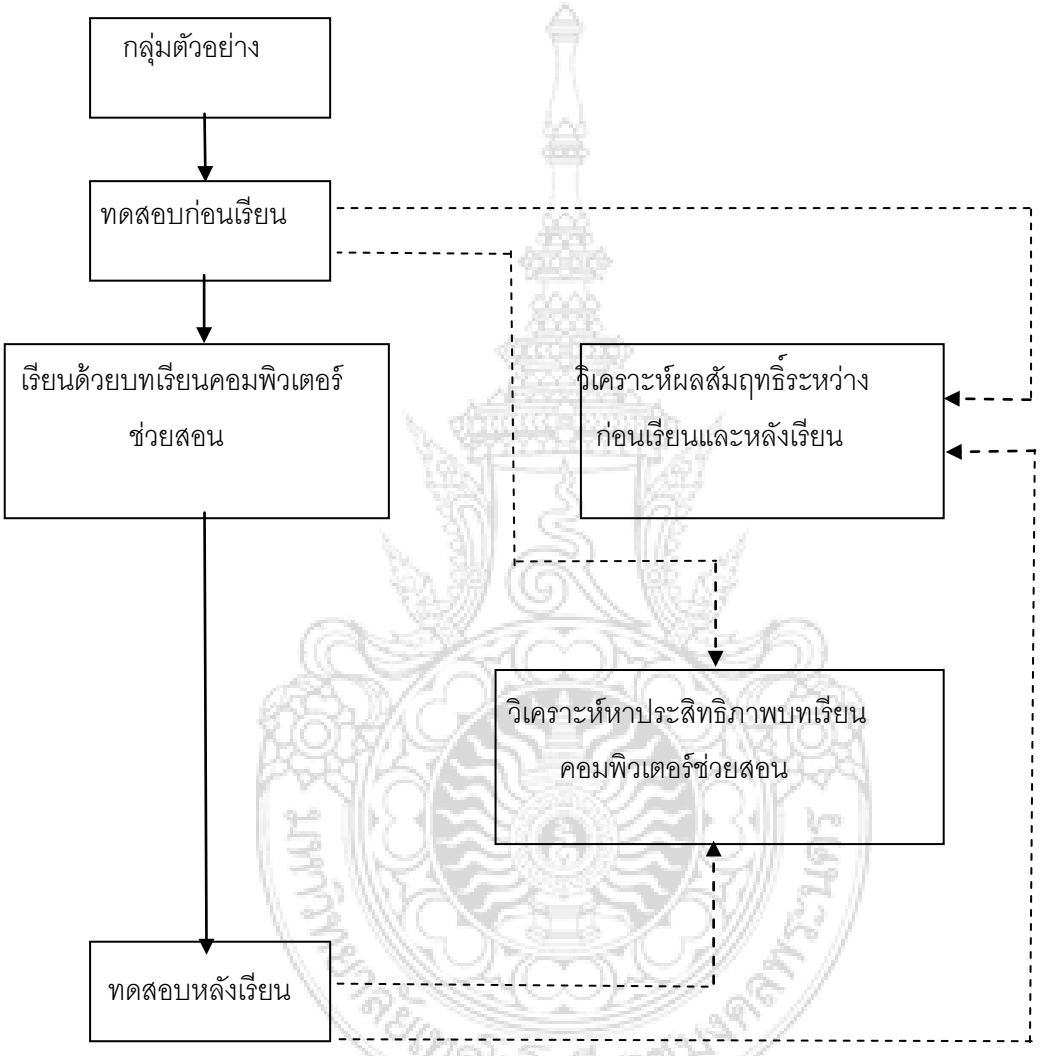
การดำเนินการทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูล มีขั้นตอนการทดลองและการวิเคราะห์ข้อมูล ดังนี้
การทดลองครั้งนี้ผู้วิจัยกำหนดการทดลอง ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2553 ดังนี้

1. การเตรียมสถานที่
2. แจกแบบทดสอบให้กลุ่มตัวอย่างทำแบบทดสอบก่อนเรียน

3. ทำการสอนด้วยบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

4. แจกแบบทดสอบเดิม ทำแบบทดสอบ

5. นำผลที่ได้จากการทำแบบทดสอบก่อนเรียน และแบบทดสอบหลังเรียนของกลุ่มตัวอย่างไปวิเคราะห์หาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน และนำผลที่ได้จากการทำแบบทดสอบก่อนเรียนและแบบทดสอบหลังเรียน ไปวิเคราะห์หาประสิทธิภาพของบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน



ภาพที่ 2 แสดงขั้นตอนการทดลองและการวิเคราะห์ข้อมูล

สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

การวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้วิเคราะห์ข้อมูล โดยการคำนวณหาค่าทางสถิติ ในการวิเคราะห์แบบทดสอบ การคำนวณค่าความยากง่าย (Difficulty Power) ค่าความเชื่อมั่น (Reliability) ซึ่งสถิติในการวิเคราะห์ ข้อมูลดังนี้

1 สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์แบบทดสอบ

1.1 หาค่าความยากง่าย (Difficulty Power) และค่าอำนาจจำแนก

(Discrimination Power) ของแบบทดสอบ

1.2 หาค่าความเชื่อมั่น (Reliability) ของแบบทดสอบ

1.3 หาค่าเฉลี่ยเลขคณิต

2. การวัดความเที่ยงตรงของข้อสอบตามวัตถุประสงค์

3. การทดสอบความแตกต่างของคะแนนก่อนเรียนและคะแนนหลังเรียน

4. การวิเคราะห์หาประสิทธิภาพของบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

ตัวแปรอิสระ (Independent Variable) คือ บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนเรื่องตามชื่อเรื่องแผนงานวิจัย

ตัวแปรตาม (Dependent Variable) คือ ผล สัมฤทธิ์ทางการเรียน

สมมติฐานการวิจัย

1. บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่สร้างขึ้นมีประสิทธิภาพตามเกณฑ์มาตรฐาน

2. หลังจากเรียนด้วยบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่สร้างขึ้น นักศึกษามีความรู้เพิ่มมากอย่างมีนัยสำคัญที่ .05

ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

1. หน่วยงานของผู้วิจัยได้บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน ซึ่งผ่านการหาประสิทธิภาพแล้วทำให้ผู้ที่นำไปใช้ในการเรียนการสอนมีความมั่นใจว่า สามารถใช้ในการประกอบการเรียนในชั้นเรียนได้ตั้งแต่ปีการศึกษาที่ 2554

2. นักศึกษาสามารถใช้บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนศึกษาก่อนเรียนในชั้นหรือทบทวนนอกเวลาได้

3. บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่สร้างขึ้น ช่วยแก้ปัญหาในการจัดการเรียนการสอนของผู้วิจัยและอาจารย์ผู้สอนท่านอื่นๆ เรื่อง “รอยต่อการถ่ายทอดทางการศึกษา ” ตลอดจนบุคลากรในหน่วยงานอื่น ฯ หรือองค์กรต่าง ฯ ที่นำไปใช้และทำให้เกิดประโยชน์ในการปฏิบัติงานยิ่งขึ้น

เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

ในการศึกษางานวิจัยครั้งนี้ ผู้วิจัยได้ศึกษาค้นคว้าเอกสารงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง โดยแบ่งแยกกล่าวรายละเอียดเป็นหัวข้อดังต่อไปนี้

1. การวิเคราะห์เนื้อหาเนื้อหาวิชา
2. การสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน
3. การสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน
4. ความหมายคอมพิวเตอร์ช่วยสอน
5. การหาประสิทธิภาพของบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน
6. งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

การวิเคราะห์เนื้อหาวิชา

การวิเคราะห์เนื้อหาคือ การนำเอาเนื้อหาวิชาจากหลักสูตรมาแบ่งออกเป็นเรื่องย่อยๆ หรือหน่วยย่อยตามสมควร การแบ่งเนื้อหานี้พยายามแบ่งให้แต่ละตอนใหญ่ไล่เลี่ยกันอาจจะสลับหัวข้อได้เพื่อให้มีความต่อเนื่องก้น หรือเนื้อหาตอนใดควรต่อเติมก็ทำได้ ข้อสำคัญคือไม่ควรมีการตัดทอนเนื้อหาของหลักสูตรให้น้อยลงไป (เสาวนีย์ , 2528 : 105)

การวิเคราะห์เนื้อหาวิชา คือ การคัดเลือกเนื้อหาวิชา เพื่อให้ได้เนื้อหาวิชาที่เหมาะสมและสมบูรณ์ที่สุด เป็นการวิเคราะห์และสังเคราะห์เนื้อหาเพื่อจะนำมาใช้สอนในบทเรียนนั้น ๆ
(กฤษมันต์ , 2540 17 – 23) ประกอบด้วย

1. ขอบเขตหรือความสมบูรณ์ของเนื้อหาวิชาเป็นการศึกษาสำรวจขอบเขตหรือเนื้อหาวิชาเกี่ยวข้องกันที่มีอยู่ในตำราหลาย ๆ เล่มและตำราที่นำมาใช้เลือกเพื่อศึกษานั้น ควรเป็นตำราที่ใหม่และทันสมัยเพื่อนำมาเปรียบเทียบและคัดเลือกเนื้อหาที่เหมาะสม

2. ความถูกต้องและความทันสมัยของเนื้อหาวิชา คือ การคัดเลือกเนื้อหาวิชาที่มีความเหมาะสมและถูกต้องมากที่สุด โดยพิจารณาลักษณะของเนื้อหาก่อนเป็นอันดับแรก

3. การจัดลำดับของเนื้อหาวิชา คือ เนื้อหาวิชา ความรู้ หรือประสบการณ์ที่ส่งมาจากผู้ส่งไปถึงผู้รับอาจไม่เป็นที่เข้าใจของผู้รับได้ หรือเข้าใจได้อย่างยากลำบาก จึงต้องปฏิบัติตามเงื่อนไขในการเข้าใจเนื้อหาวิชา ดังนี้

3.1 เนื้อหาวิชาหรือประสบการณ์ ต้องถูกย่อย หรือแยกเป็นส่วน ๆ ได้ โดยที่ผู้เรียนต้องเข้าใจเนื้อหาแต่ละส่วนนั้น

3.2 เนื้อหาวิชาหรือประสบการณ์ที่ย่อยแล้วนั้น ต้องเรียงลำดับอย่างเหมาะสม ซึ่งอาจถือหลักปฏิบัติได้ดังนี้ คือ

3.2.1 สอนจากง่ายไปหายาก

3.2.2 สอนจากสิ่งที่แลเห็นง่ายเป็นชิ้นไปสู่ชิ้นประกอบหลาย ๆ ส่วนอย่างยาก

3.2.3 สอนจากสิ่งที่พบเห็นทั่ว ๆ ไปไปสู่สิ่งเฉพาะพิเศษ หรือไปหาเหตุผล

3.2.4 สอนจากสิ่งที่รู้แล้วไปสู่สิ่งที่ยังไม่รู้

3.2.5 สอนจากสิ่งที่อยู่ใกล้ ไปสู่สิ่งที่อยู่ไกล ๆ

3.2.6 สอนจากสิ่งที่มีทรงชัดเจน ไปสู่สิ่งมโนภาพ

3.2.7 สอนให้เป็นไปตามธรรมชาติของเด็ก

3.2.8 สอนให้ผู้เรียนเรียนรู้โดยผ่านประสาทสัมผัสทั้งห้า

การสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

การสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนของผู้วิจัย มีลำดับขั้นตอนดังต่อไปนี้

1. การวิเคราะห์หลักสูตรรายวิชาหรือเนื้อหาวิชา แบ่งขั้นตอนได้ดังนี้

ก) ศึกษาเนื้อหาวิชาหรือเนื้อหาเนื้อหาวิชาหัวข้อเรื่องงานวิจัยของผู้วิจัย ตามหลักสูตรระดับปริญญาตรี สาขาวิศวกรรมอุตสาหการ ที่เปิดสอนที่มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนคร คณะวิศวกรรมศาสตร์

ข) วิเคราะห์วัตถุประสงค์การสอน ในเนื้อหาวิชาตามหัวข้อเรื่องงานวิจัยของผู้วิจัย ด้านความรู้ (Knowledge) ที่จำเป็นแล้วนำมาแบ่งบทเรียนและเขียนวัตถุประสงค์การสอน

ค) วิเคราะห์เนื้อหาเพื่อเลือกเนื้อหาให้เหมาะสมกับวัตถุประสงค์ ด้วยวิธีการ จัดเรียงลำดับเนื้อหาให้ตรงตามวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

2. การสร้างชุดบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน ของผู้วิจัยมีขั้นตอนดังนี้

ก) เตรียมเนื้อหาบทเรียน ตามหัวข้อเรื่องของผู้วิจัย

ข) นำวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรมและเนื้อหา ของผู้วิจัยแต่ละท่านมาจัดแบ่งเนื้อหาออกเป็นหัวข้อย่อย ๆ

ค) นำเนื้อหาบทเรียนมาทำบทเรื่อง (Scrip) ด้วยลักษณะคำบรรยายด้วยอักษร

ง) นัดผู้ถ่ายทำวีดีโอเพื่อจัดทำเป็นชุดบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน ถ่ายทำตามบทเรื่อง

จ) ผู้ถ่ายทำวีดีโอ ซึ่งผู้วิจัยเป็นผู้จัดจ้างให้ดำเนินการทำบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนของผู้วิจัย นำวีดีโอที่ถ่ายทำแล้วไปดำเนินการสร้างโปรแกรมบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

ฉ) นำบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่สร้างเสร็จเรียบร้อยแล้ว ไปให้ผู้เชี่ยวชาญด้านสื่อ จำนวน 2 ท่าน ตรวจสอบแล้วปรับปรุงแก้ไขตามคำแนะนำ

ช) นำไปให้ผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาและด้านการผลิตสื่อการสอน ประเมินคุณภาพบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่พัฒนา

พิจารณาตามเกณฑ์การประเมินตามความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ จากผลของค่าเฉลี่ยที่ได้รับตามแนวทางของเบสท์ (Best) ดังนี้ (Best , 1983 : 179 – 187)

ค่าเฉลี่ย	สรุปการประเมิน
4.50 – 5.00	ดีมาก
3.50 – 4.49	ดี
2.50 – 3.49	ใช้ได้

1.50 – 2.49 ควรปรับปรุง

1.00 – 1.49 ใช้ไม่ได้

ซ) นำบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน ที่สมบูรณ์แล้วไปใช้เก็บข้อมูลจริงจากกลุ่มทดลอง

การสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

การสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน มีลำดับขั้นตอนดังนี้

1 วิเคราะห์เนื้อหาตามหัวข้อเรื่องงานวิจัยของผู้วิจัยแต่ละท่าน

2 วิเคราะห์วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรมของเนื้อหาทั้งหมด

3 ศึกษาตำราและเอกสารเกี่ยวกับการวัดและการประเมินผลการศึกษาเพื่อใช้เป็นแนวทางการสร้างข้อสอบ และเขียนข้อสอบ

4 สร้างแบบทดสอบที่ครอบคลุมเนื้อหาและวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

5. นำแบบทดสอบที่สร้างขึ้นให้ผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาจำนวน 1 ท่าน ตรวจสอบและปรับปรุงแก้ไขเพื่อให้ได้ข้อสอที่มีความเที่ยงตรงตามเนื้อหาและด้านอื่น ๆ ที่มีผลต่อการวิจัย

6. นำแบบทดสอบ ที่ได้ปรับปรุงแก้ไขแล้วไปทดลอง (Tryout) กับนักศึกษาระดับปริญญาตรีที่เปิดสอน ณ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนคร ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2548 จำนวนประมาณ 26 คน เพื่อวิเคราะห์หาค่าความยากง่าย (Level of Difficult) และค่าอำนาจจำแนก(Discrimination Power) โดยถือเกณฑ์พิจารณาดังนี้ ให้ข้อสอบมีค่าความยากง่าย (P) อยู่ระหว่าง 0.2 – 0.8 และมีค่าอำนาจจำแนก(D) ตั้งแต่ 0.20 ขึ้นไป และการหาคุณภาพของแบบทดสอบทั้งฉบับ กลุ่มผู้วิจัยหาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ (Reliability) โดยใช้สูตร คูเดอร์ ริชาร์สัน (Kuder Richardson Formular 20) (ล้วนและอังคณา ,2538 :198) เมื่อได้ค่าความเชื่อมั่นแล้วนำมาดำเนินการเลือกข้อสอบที่ผ่านเกณฑ์ดังกล่าว และนำมาหาค่าความเชื่อมั่นอีกครั้งเมื่อได้ค่าความเชื่อมั่นตามที่ต้องการแล้ว จึงนำข้อสอบชุดนี้ไปใช้กับกลุ่มตัวอย่าง โดยแบ่งข้อสอบออกเป็น 2 ชุด ชุดแรกใช้เป็นแบบทดสอบก่อนเรียนและชุดที่สองเป็นแบบทดสอบหลังเรียนโดยครอบคลุมเนื้อหาวัตถุประสงค์ทั้งหมดแล้วนำแบบทดสอบชุดที่สองมาหาค่าความเชื่อมั่นอีกครั้ง

ความหมายคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

คอมพิวเตอร์ช่วยสอน หมายถึง สื่อการเรียนการสอนทางคอมพิวเตอร์รูปแบบหนึ่งซึ่งใช้ความสามารถของคอมพิวเตอร์ในการสำเสนอสื่อประสม ได้แก่ ข้อความ ภาพนิ่ง กราฟฟิก แผนภูมิ กราฟ ภาพเคลื่อนไหว วีดีทัศน์และเสียง เพื่อถ่ายทอดเนื้อหาบทเรียนหรือองค์ความรู้ในลักษณะที่แตกต่างกันออกไป ขึ้นอยู่กับธรรมชาติและโครงสร้างของเนื้อหา มีเป้าหมาย คือการได้มาซึ่งคอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่ดึงดูดความสนใจของผู้เรียน และต้องการกระตุ้นผู้เรียนให้เกิดความต้องอยากเรียนรู้ ช่วยให้ผู้เรียนที่เรียนอ่อนสามารถใช้เวลานอกเวลาเรียนในการฝึกฝนทักษะและเพิ่มเติมความรู้ เพื่อที่จะปรับปรุงการเรียนของตนให้ทันผู้เรียนอื่นได้ ดังนั้นผู้สอนจึงสามารถนำคอมพิวเตอร์ช่วยสอนไปใช้ช่วยในการสอนเสริม หรือสอนทบทวนการสอนปกติในชั้นเรียนได้ โดยที่ผู้สอนไม่จำเป็นต้องเสียเวลาในการสอนซ้ำกับผู้เรียนที่ตามไม่ทัน หรือจัดการสอนเพิ่มเติม

ผู้เรียนสามารถนำคอมพิวเตอร์ช่วยสอนไปใช้ในการเรียนด้วยตนเองในเวลา และสถานที่ซึ่งผู้เรียนสะดวก สามารถเรียนในเวลาใดก็ได้ที่ต้องการ สามารถที่จะจูงใจผู้เรียน (Motivated) ที่จะเรียนและสนุกสนานไปกับการเรียนตามแนวคิดของการเรียนรู้ในปัจจุบันที่เรียกว่า "Learning is Fun " ซึ่งหมายถึง การเรียนรู้เป็นเรื่องสนุก (ถนอมพร,2541:7–12)

การหาประสิทธิภาพของบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

การวิเคราะห์หาประสิทธิภาพของบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน สถิติที่ใช้ในการหาประสิทธิภาพของบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน โดยใช้สูตร (เสาวณีย์ , 2528 : 284)

$$\text{ประสิทธิภาพ} = \frac{M_2 - M_1}{P - M_1} + \frac{M_2 - M_1}{P}$$

M_1 = ผลของคะแนนเฉลี่ยจากการสอบก่อนการเรียน (Pre - test)

M_2 = ผลของคะแนนเฉลี่ยจากการสอบหลังการเรียน (Post - test)

P = คะแนนเต็มของข้อทดสอบ

ค่าของอัตราส่วนที่ได้จากสูตรนี้ จะมีค่าระหว่าง 0 – 2 ถ้าค่าที่หาออกมาได้มีค่ามากกว่า 1 ถือว่า บทเรียนคอมพิวเตอร์นั้นได้เกณฑ์มาตรฐาน

งานวิจัยที่เกี่ยวข้องกับบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

การศึกษาในปัจจุบันมุ่งส่งเสริมผู้เรียนให้มีความรู้ในเนื้อหาวิชาต่าง ๆ ไม่ว่าจะเป็นจากอาจารย์ผู้สอนโดยตรงหรือจากการแสวงหาความรู้ด้วยตนเอง ซึ่งการมีสื่อการเรียนการสอนที่น่าสนใจเพื่อจะนำเสนอเนื้อหาต่าง ๆ นั้นจะช่วยดึงดูดความสนใจของผู้เรียน ในการค้นคว้าหาความรู้เพิ่มเติมและช่วยให้ผู้เรียนเข้าใจในเนื้อหาวิชานั้นดีขึ้น ดังนั้นจึงมีการนำเทคโนโลยีมาใช้เพื่อพัฒนาสื่อการเรียนการสอน เพิ่มมากขึ้น ในปัจจุบันความเจริญก้าวหน้าทางเทคโนโลยี ทำให้สามารถติดต่อข่าวสารกันได้แทบทุกหนทุกแห่งในโลกมีการประดิษฐ์คิดค้นอุปกรณ์สื่อสารและสิ่งอำนวยความสะดวกในชีวิตประจำวัน นอกจากนี้แล้วยังมีการประดิษฐ์คิดค้นสื่อการศึกษาใหม่ ๆ ออกสู่ท้องตลาดมากมายโดยเฉพาะอย่างยิ่ง คือ "คอมพิวเตอร์" และได้มีการนำคอมพิวเตอร์มาใช้เพื่อการศึกษากันอย่างแพร่หลาย (กรมการศึกษานอกโรงเรียน , 2541 : 2)

คอมพิวเตอร์ที่นำมาใช้ด้านการเรียนการสอน (Computer – Based Instruction) สามารถแบ่งออกได้เป็น 2 ประเภทใหญ่ ๆ ได้แก่ คอมพิวเตอร์ช่วยสอน (Computer - Assisted Instruction: CAI) และคอมพิวเตอร์ช่วยจัดการเรียนการสอน (Computer – Managed Instruction: CMI) ซึ่งจะแบ่งตามลักษณะการนำไปใช้ในกิจกรรมของการเรียนการสอนทั้งหมด (กฤษมันต์, 2536:136)

สำเริง (2547) ได้สร้างและหาประสิทธิภาพ บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนเรื่องการฝึกปฏิบัติลับดอกสว่านด้วยมือ และเรื่องการฝึกปฏิบัติการกลึงงานขั้นพื้นฐาน กลุ่มตัวอย่างเป็นนักศึกษาแผนกเทคนิคอุตสาหกรรม ระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง สถาบันเทคโนโลยีราชมงคล วิทยาเขตพระนครเหนือ ผลการวิจัยปรากฏว่า ประสิทธิภาพของบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน ได้เกณฑ์มาตรฐาน 90/90และหลังจากเรียนด้วยบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน นักศึกษามีความรู้เพิ่มขึ้นอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05

พิเชฐ (2547) ได้สร้างและหาประสิทธิภาพ บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนเรื่องการฝึกปฏิบัติการทดสอบวัสดุในทางวิศวกรรม กลุ่มตัวอย่างเป็นนักศึกษา ระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง สถาบันเทคโนโลยีราชมงคล วิทยาเขตพระนครเหนือ ผลการวิจัยปรากฏว่าประสิทธิภาพของบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน ได้เกณฑ์มาตรฐาน 90/90 และหลังจากเรียนด้วยบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน นักศึกษามีความรู้เพิ่มขึ้นอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05

ทินกร (2547) ได้สร้างและหาประสิทธิภาพบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนเรื่องฝึกปฏิบัติ ในงานวิชาโลหะวิทยา กลุ่มตัวอย่างเป็นนักศึกษา ระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง สถาบันเทคโนโลยีราชมงคล วิทยาเขตพระนครเหนือ ผลการวิจัยปรากฏว่าประสิทธิภาพของบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนได้เกณฑ์มาตรฐาน 90/90 และหลังจากเรียนด้วยบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน นักศึกษามีความรู้เพิ่มขึ้นอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05

บุญธรรม (2547) ได้สร้างและหาประสิทธิภาพ บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนเรื่อง ฝึกปฏิบัติในงานงานไม้ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักศึกษา ระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง สถาบันเทคโนโลยีราชมงคล วิทยาเขตพระนครเหนือ ผลการวิจัยปรากฏว่าประสิทธิภาพของบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน ได้เกณฑ์มาตรฐาน 90/90 และหลังจากเรียนด้วยบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน นักศึกษามีความรู้เพิ่มขึ้นอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05

สิงห์แก้ว (2547) ได้สร้างและหาประสิทธิภาพบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนเรื่อง การฝึกปฏิบัติงานบนเครื่องกลึงอัตโนมัติ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักศึกษา ระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง สถาบันเทคโนโลยีราชมงคล วิทยาเขตพระนครเหนือ ผลการวิจัยปรากฏว่าประสิทธิภาพของบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนได้เกณฑ์มาตรฐาน 90/90 และหลังจากเรียนด้วยบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน นักศึกษามีความรู้เพิ่มขึ้นอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05

คมพันธ์ (2547) ได้สร้างและหาประสิทธิภาพ บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนเรื่อง การฝึกปฏิบัติงานบนเครื่องกัดอัตโนมัติ กลุ่มตัวอย่างเป็นนักศึกษา ระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง สถาบันเทคโนโลยีราชมงคล วิทยาเขตพระนครเหนือ ผลการวิจัยปรากฏว่าประสิทธิภาพของบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนได้เกณฑ์มาตรฐาน 90/90 และหลังจากเรียนด้วยบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน นักศึกษามีความรู้เพิ่มขึ้นอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05

ประเสริฐ (2547) ได้สร้างและหาประสิทธิภาพ บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอ เรื่องการถอดประกอบปั้มฉีดน้ำมันเชื้อเพลิงเครื่องยนต์ดีเซล กลุ่มตัวอย่างเป็นนักศึกษาระดับประกาศนียบัตรวิชาชีพชั้นสูง สถาบันเทคโนโลยีราชมงคล วิทยาเขตพระนครเหนือ ผลการวิจัยปรากฏว่าประสิทธิภาพของบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนได้เกณฑ์มาตรฐาน 90/90 และหลังจากเรียนด้วยบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน นักศึกษามีความรู้เพิ่มขึ้นอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05

วิธีการวิจัย

ในการทดลองครั้งนี้เป็นการวิจัยเชิงทดลอง (Experimental Research) เพื่อหาประสิทธิภาพบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่สร้างขึ้น และวิเคราะห์ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังจากเรียนด้วยบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน ซึ่งมีรายละเอียดการวิจัยดังนี้

1. ระเบียบวิธีวิจัยที่ใช้
2. กลุ่มตัวอย่าง
3. เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย
4. การดำเนินการทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูล
5. การวิเคราะห์ข้อมูลและสถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

ระเบียบวิธีวิจัยที่ใช้

การวิจัยครั้งนี้ใช้แบบแผนการวิจัยเชิงทดลอง (Experimental Research) โดยใช้แบบแผนการทดลองที่มีกลุ่มตัวอย่างหนึ่งกลุ่มทำการทดสอบก่อนและทดสอบหลังการทดลองทันที (One – Group Pretest – Posttest Design) มีรูปแบบดังตารางที่ 1

สอบก่อนเรียน	การทดลอง	สอบหลังเรียน
T1	X	T2

ตารางที่ 1 แสดงการทดลองที่มีกลุ่มตัวอย่างหนึ่งกลุ่ม ทำการทดลองก่อนและหลังการทดลองทันที

เมื่อ X คือ การเรียนด้วยบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

T_1 คือ คะแนนสอบก่อนเรียน

T_2 คือ คะแนนสอบหลังเรียนทันที

กลุ่มตัวอย่าง

1. ประชากร คือ นักศึกษาระดับปริญญาตรี สาขาวิชาช่างอุตสาหกรรมที่เปิดสอน ณ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนคร

2. กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัยครั้งนี้ เป็นนักศึกษานักศึกษาระดับปริญญาตรีคณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนคร ที่ลงทะเบียนเรียนในวิชาหรือเนื้อหาวิชาตรงกับหัวข้องานวิจัยของผู้วิจัยในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2553 โดยจะทำการสุ่มตัวอย่างแบบเจาะจงจำนวนนักศึกษาทั้งห้องเพื่อนำมาทดลองและใช้บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนซึ่งมีอาจารย์ผู้สอนและผู้วิจัยควบคุม

เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

1. การสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

1.1 การวิเคราะห์หลักสูตรรายวิชาหรือเนื้อหาวิชาตามหัวข้อเรื่องงานวิจัย

ก) ศึกษาเนื้อหาวิชาตามหัวข้อเรื่องงานวิจัย ตามหลักสูตรปริญญาตรี สาขาช่างอุตสาหกรรมที่เปิดสอนที่มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนคร

ข) วิเคราะห์วัตถุประสงค์การสอน ในเนื้อหาวิชาตามหัวข้อเรื่องงานวิจัย ด้านความรู้ (Knowledge) ที่จำเป็น โดยให้ผู้เชี่ยวชาญพิจาณาเนื้อหาที่จะสอนเนื่องจากเนื้อหาเน้นทางทฤษฎีหรือปฏิบัติ แล้วนำมาแบ่งบทเรียนและเขียนวัตถุประสงค์การสอน

ค) วิเคราะห์เนื้อหาเพื่อเลือกเนื้อหาให้เหมาะสมกับวัตถุประสงค์ ด้วยวิธีการดังต่อไปนี้

- จัดเรียงลำดับเนื้อหาให้ตรงตามวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม
- นำเนื้อหาให้ผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหา จำนวน 2 ท่าน ตรวจสอบและปรับปรุงแก้ไข

1.2 การสร้างชุดบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน มีขั้นตอนดังนี้

ก) เตรียมเนื้อหาบทเรียน ตามหัวข้อเรื่องงานวิจัย

ข) นำวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรมและเนื้อหา ตามหัวข้อเรื่องงานวิจัยมาจัดแบ่งเนื้อหาออกเป็นหัวข้อย่อย ๆ

ค) นำเนื้อหาบทเรียนมาทำบทเรื่อง (Scrip) ด้วยลักษณะคำบรรยายด้วยอักษร

ง) นัดผู้ถ่ายทำวีดีโอเพื่อจัดทำเป็นชุดบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน ถ่ายทำตามบทเรื่อง

จ) ผู้ถ่ายทำวีดีโอ ซึ่งผู้วิจัยเป็นผู้จัดจ้างให้ดำเนินการทำบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนตามหัวข้อเรื่องงานวิจัย นำวีดีโอที่ถ่ายทำแล้วไปดำเนินการสร้างโปรแกรมบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

ฉ) นำบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน ที่สร้างเสร็จเรียบร้อยแล้วไปให้ผู้เชี่ยวชาญด้านสื่อ จำนวน 2 ท่าน ตรวจสอบแล้วปรับปรุงแก้ไขตามคำแนะนำ

ช) การทดลองใช้บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

การทดลองเพื่อศึกษาข้อบกพร่องต่าง ๆ ทางด้านเนื้อหา การดำเนินเรื่อง รูปภาพและภาษาที่ใช้ การเชื่อมโยงเสียงรวมถึงเวลาที่ใช้ในการเรียนการสอน เพื่อนำข้อมูลที่ได้มาปรับปรุงแก้ไขกับนักศึกษาที่ไม่ใช่กลุ่มทดลอง

ซ) นำไปให้ผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาและด้านการผลิตสื่อการสอน ประเมินคุณภาพบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่พัฒนา

พิจารณาตามเกณฑ์การประเมินตามความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญ จากผลของค่าเฉลี่ยที่ได้รับตาม แนวทางของเบสท์ (Best) ดังนี้ (Best ,1983 :179 –187)

ค่าเฉลี่ย	สรุปการประเมิน
4.50 – 5.00	ดีมาก
3.50 – 4.49	ดี
2.50 – 3.49	ใช้ได้
1.50 – 2.49	ควรปรับปรุง
1.00 – 1.49	ใช้ไม่ได้

ฌ) นำบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน ตามหัวข้อเรื่องของผู้วิจัยแต่ละท่านที่สมบูรณ์แล้วไปใช้เก็บข้อมูลจริงจากกลุ่มทดลอง

2. การสร้างแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

2.1 วิเคราะห์เนื้อหาตามหัวข้อเรื่องงานวิจัย

2.2 วิเคราะห์วัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรมของเนื้อหาทั้งหมด

2.3 ศึกษาตำราและเอกสารเกี่ยวกับการวัด และการประเมินผลการศึกษาเพื่อใช้เป็นแนวทางการสร้างข้อสอบ และเขียนข้อสอบ

2.4 สร้างแบบทดสอบ ที่ครอบคลุมเนื้อหาและวัตถุประสงค์เชิงพฤติกรรม

2.5 นำแบบทดสอบที่สร้างขึ้นให้ผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาจำนวน 2 ท่าน ตรวจสอบและปรับปรุงแก้ไข เพื่อให้ได้ข้อสอบที่มีความเที่ยงตรงตามเนื้อหาและด้านอื่น ๆที่มีผลต่อการวิจัย

2.6 นำแบบทดสอบที่ได้ปรับปรุงแก้ไขแล้วไปทดลอง (Tryout) กับนักศึกษาระดับปริญญาตรี สาขาช่างอุตสาหกรรมที่เปิดสอน ณ คณะวิศวฯ ที่มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนคร ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2553 จำนวนทั้งห้อง ซึ่งกำลังเรียนวิชาหรือเนื้อหาตรงกับบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่สร้างขึ้น เพื่อวิเคราะห์หาค่าความยากง่ายและค่าอำนาจจำแนก โดยถือเกณฑ์พิจารณาดังนี้ ให้ข้อสอบมีค่าความยากง่าย (P) อยู่ระหว่าง 0.2–0.8 และมีค่าอำนาจจำแนก (D) ตั้งแต่ 0.20 ขึ้นไป และการหาคุณภาพของแบบทดสอบทั้งฉบับ ผู้วิจัยหาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ โดยใช้สูตร คูเดอร์ริชาร์สัน (Kuder Richardson Formular 20) (ล้วนและอังคณา,2538:198) เมื่อได้ค่าความเชื่อมั่นแล้วนำมาดำเนินการเลือกข้อสอบที่ผ่านเกณฑ์ดังกล่าว และนำมาหาค่าความเชื่อมั่นอีกครั้ง เมื่อได้ค่าความเชื่อมั่นตามที่ต้องการแล้ว จึงนำข้อสอบชุดนี้ไปใช้กับกลุ่มตัวอย่าง โดยแบ่งข้อสอบออกเป็น 2 ชุด ชุดแรกใช้เป็นแบบทดสอบก่อนเรียนและชุดที่สองเป็นแบบทดสอบหลังเรียน โดยครอบคลุมเนื้อหาวัตถุประสงค์ทั้งหมด แล้วนำแบบทดสอบชุดที่สองมาหาค่าความเชื่อมั่นอีกครั้ง

การดำเนินการทดลองและเก็บรวบรวมข้อมูล

การทดลองครั้งนี้ผู้วิจัยกำหนดการทดลอง ในภาคเรียนที่ 1 ปีการศึกษา 2553 ดังนี้

1. การเตรียมสถานที่ ใช้ห้องปฏิบัติการสอนของคณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนคร

2. แจกแบบทดสอบให้กลุ่มตัวอย่างทำแบบทดสอบก่อนเรียน

3. ทำการสอนด้วยบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนตามหัวข้อเรื่องงานวิจัย โดยมีอาจารย์ผู้สอน 1 ท่าน คือ ผู้ที่ทำวิจัยเป็นผู้สอน

4. แจกแบบทดสอบเดิมให้กลุ่มตัวอย่างทำอีกครั้ง

5. นำผลที่ได้จากการทำแบบทดสอบก่อนเรียน และแบบทดสอบหลังเรียนของกลุ่มตัวอย่างไปวิเคราะห์หาผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน และนำผลที่ได้จากการทำแบบทดสอบก่อนเรียนและแบบทดสอบหลังเรียน ไปวิเคราะห์หาประสิทธิภาพของบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล

การวิจัยครั้งนี้ผู้วิจัยได้วิเคราะห์ข้อมูล โดยการคำนวณหาค่าทางสถิติ ในการวิเคราะห์แบบทดสอบ การคำนวณค่าความยากง่าย (Difficulty Power) ค่าความเชื่อมั่น (Reliability) ซึ่งสถิติในการวิเคราะห์ข้อมูลดังนี้

1 สถิติที่ใช้ในการวิเคราะห์แบบทดสอบ

1.1 หาค่าความยากง่าย (Difficulty Power) และค่าอำนาจจำแนก (Discrimination Power) ของแบบทดสอบ

สูตรหาค่าความยากง่ายของข้อสอบ (ล้วนและอังคณา , 2538 : 210 – 211)

$$P = \frac{R}{N}$$

เมื่อ P คือ ค่าความยากง่าย

R คือ จำนวนคนที่ทำข้อนั้นถูก

N คือ จำนวนคนที่ทำข้อนั้นทั้งหมด

โดยพิจารณาเลือกข้อสอบที่มีค่าความยากง่ายในช่วง 0.20 – 0.80

สูตรหาค่าอำนาจจำแนกของข้อสอบ (ล้วนและอังคณา , 2538 : 211)

$$D = \frac{R_U - R_L}{N/2}$$

เมื่อ D คือ ค่าอำนาจจำแนก

R_U คือ จำนวนนักเรียนที่ทำข้อนั้นถูกในกลุ่มเก่ง

R_L คือ จำนวนนักเรียนที่ทำข้อนั้นถูกในกลุ่มอ่อน

N คือ จำนวนนักเรียนในกลุ่มเก่งและกลุ่มอ่อน

โดยพิจารณาเลือกข้อสอบที่มีค่าอำนาจจำแนกตั้งแต่ 0.20 ขึ้นไป

1.2 หาค่าความเชื่อมั่น (Reliability) ของแบบทดสอบ

สูตรหาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ โดยใช้สูตร KR_{-20} (Kuder Richardson Formula 20) (ล้วนและอังคณา , 2538 : 198)

$$r_{tt} = \frac{n}{N-1}\left[1 - \frac{S\,pq}{S_t^2}\right]$$

เมื่อ r_{tt} คือ ความเชื่อมั่นของแบบทดสอบทั้งฉบับ

N คือ จำนวนข้อของเครื่องมือวัด

p คือ สัดส่วนของผู้ทำได้ในข้อหนึ่ง ๆ นั่นคือสัดส่วนของคนทำถูกกับคน ทั้งหมด

q คือ สัดส่วนของผู้ที่ทำผิดในข้อหนึ่ง ๆ หรือ คือ 1 – p

S_t^2 คือ คะแนนความแปรปรวนของเครื่องมือทั้งฉบับ

1.3 **หาค่าเฉลี่ยเลขคณิต** (ล้วนและอังคณา , 2538 : 73)

$$\overline{X} = \frac{S X}{N}$$

เมื่อ $\overline{X}$ คือ ค่าเฉลี่ยอัตราส่วนของคะแนน

$S X$ คือ ผลรวมของคะแนนทั้งหมด

N คือ จำนวนผู้เข้าสอบ

2. การวัดความเที่ยงตรงของข้อสอบตามวัตถุประสงค์

สูตรการวัดความเที่ยงตรงตามวัตถุประสงค์ โดยใช้สูตร Rovinell and Hambeton (กังวล , 2536 : 185 – 186)

$$O.V. = \frac{\sum_{I=1}^{n} X_I}{N}$$

เมื่อ O.V. คือ ความเที่ยงตรงตามวัตถุประสงค์

n คือ จำนวนผู้เชี่ยวชาญ

X คือ ความตรงตามวัตถุประสงค์ มีค่าเป็น + 1 , 0 และ -1

โดยพิจารณาเลือกข้อสอบที่มีค่าความเที่ยงตรงของวัตถุประสงค์ตั้งแต่ 0.50 ขึ้นไป

3. การทดสอบความแตกต่างของคะแนนก่อนเรียนและคะแนนหลังเรียน

ใช้โปรแกรมทดสอบ Pre – Post test ของโปรแกรม Exel ที่นัยสำคัญ 0.05

4. การวิเคราะห์หาประสิทธิภาพของบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

สถิติที่ใช้ในการหาประสิทธิภาพของบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน โดยใช้สูตร (เสาวณีย์ , 2528 : 284)

$$\text{ประสิทธิภาพ ฯ} = \frac{M_2 - M_1}{P - M_1} + \frac{M_2 - M_1}{P}$$

M_1 = ผลของคะแนนเฉลี่ยจากการสอบก่อนการเรียน (Pre - tese)

M_2 = ผลของคะแนนเฉลี่ยจากการสอบหลังการเรียน (Post - test)

P = คะแนนเต็มของข้อทดสอบ

ค่าของอัตราส่วนที่ได้จากสูตรนี้ จะมีค่าระหว่าง 0 – 2 ถ้าค่าที่หาออกมาได้มีค่ามากกว่า 1 ถือว่า บทเรียนคอมพิวเตอร์นั้นได้เกณฑ์มาตรฐาน

ผลของการวิจัย

วัตถุประสงค์ของการวิจัยครั้งนี้ เพื่อสร้างและหาประสิทธิภาพบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนการสร้างและหาประสิทธิภาพบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน ตามหัวข้อเรื่องงานวิจัย สำหรับนักศึกษาระดับปริญญาตรี คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนคร และวิเคราะห์ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังจากเรียนด้วยบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน โดยผู้วิจัยได้วิเคราะห์ข้อมูล ดังนี้

1. การวิเคราะห์หาค่าความคิดเห็นของบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนจากผู้เชี่ยวชาญ
2. การวิเคราะห์หาประสิทธิภาพของบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน
3. การวิเคราะห์ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังจากเรียนด้วยบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

การวิเคราะห์หาประสิทธิภาพบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน ปรากฏผลดังนี้

1 การวิเคราะห์หาค่าความคิดเห็นของบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนจากผู้เชี่ยวชาญ

ผู้เชี่ยวชาญ	จำนวน (คน)	$\overline{X}$	ระดับความคิดเห็น
ด้านเนื้อหา	2	5.00	ดีมาก
ด้านการผลิตสื่อการสอน	2	5.00	ดีมาก

ตารางที่ 2 แสดงค่าความคิดเห็นของบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนจากผู้เชี่ยวชาญ

จากตารางที่ 2 แสดงให้เห็นว่าบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น มีค่าความคิดเห็นจองผู้เชี่ยวชาญทางด้านเนื้อหาอยู่ที่ระดับ 5.00 และค่าความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญทางด้านการผลิตสื่ออยู่ที่ระดับ 5.00 สรุปได้ว่า ผู้เชี่ยวชาญมีความคิดเห็นว่าบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้นอยู่ในเกณฑ์ดีมาก ทั้งทางด้านเนื้อหาและทางด้านการผลิตสื่อการสอน

2. การหาประสิทธิภาพบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

สถิติที่ใช้ในการหาประสิทธิภาพของบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน โดยใช้สูตร (เสาวณีย์ , 2528 : 284)

$$\text{ประสิทธิภาพ ฯ} = \frac{M_2 - M_1}{P - M_1} + \frac{M_2 - M_1}{P}$$

M_1 = ผลของคะแนนเฉลี่ยจากการสอบก่อนการเรียน (Pre - tese)

M_2 = ผลของคะแนนเฉลี่ยจากการสอบหลังการเรียน (Post - test)

P = คะแนนเต็มของข้อทดสอบ

ค่าของอัตราส่วนที่ได้จากสูตรนี้ จะมีค่าระหว่าง 0 – 2 ถ้าค่าที่หาออกมาได้มีค่ามากกว่า 1 ถือว่า บทเรียนคอมพิวเตอร์นั้นได้เกณฑ์มาตรฐาน

แทนค่า $M_1 = 12.12$

$M_2 = 25.59$

$P = 30$

$$\text{ประสิทธิภาพ ฯ} = \frac{25.59 - 12.12}{30 - 12.12} + \frac{25.59 - 12.12}{30}$$

$$= 0.753 + 0.449$$

$$= 1.202$$

ค่าที่ได้ = 1.202 ดังนั้นบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน ได้เกณฑ์มาตรฐาน

3. การวิเคราะห์ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน หลังจากเรียนด้วยบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

การวิเคราะห์ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ระหว่างก่อนเรียนและหลังเรียนด้วยบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน โดยใช้โปรแกรมสำเร็จรูปของ เอกซ์เซล (Exel) ปรากฏผลดังนี้ ผู้เรียนมีความรู้เพิ่มขึ้นจริงเชื่อได้ 95 % หรือนักศึกษามีความรู้เพิ่มขึ้นอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05

สรุปผลการวิเคราะห์ข้อมูล

1. บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน มีค่าความคิดเห็นจากผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาอยู่ที่ระดับ 5.00 และด้านการผลิตสื่อการสอนอยู่ที่ระดับ 5.00 ถือว่าอยู่ในระดับดีมาก

2. ประสิทธิภาพของบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน เรื่องวิชากระบวนการผลิต บทที่ 5-8 ได้เกณฑ์มาตรฐาน

3. หลังจากเรียนด้วยบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน นักศึกษามีความรู้เพิ่มขึ้นอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05

สรุปผลการวิจัย อภิปรายผลและข้อเสนอแนะ

การวิจัยครั้งนี้ มีวัตถุประสงค์เพื่อสร้างและหาประสิทธิภาพบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนเรื่องวิชากลศาสตร์วัสดุบทที่ 3-6 สำหรับนักศึกษาระดับปริญญาตรี คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนคร และวิเคราะห์ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังจากเรียนด้วยบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน กลุ่มตัวอย่างที่ใช้ในการวิจัย เป็นนักศึกษาระดับปริญญาตรีสาขาวิศวกรรมอุตสาหการ จำนวน 20 คน เครื่องมือที่ใช้ในการเก็บข้อมูลในการวิจัย คือ บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนเรื่องวิชากลศาสตร์วัสดุบทที่ 3-6 และแบบทดสอบวัดผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน

การสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนในการวิจัยนี้ เริ่มต้นจากศึกษาหลักสูตรและข้อมูลต่าง ๆ การวิเคราะห์เนื้อหา การกำหนดวัตถุประสงค์ การสร้างแบบทดสอบ การสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน โดยเก็บบันทึกไว้ในแผ่นซีดีรอมจำนวน 2 แผ่น การวิเคราะห์หาประสิทธิภาพบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่สร้างขึ้น ใช้เกณฑ์การหาค่าประสิทธิภาพ การวิเคราะห์ผลสัมฤทธิ์ของกลุ่มตัวอย่างที่เรียนด้วยบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน เมื่อทำแบบทดสอบก่อนเรียน และหลังเรียนด้วยแบบทดสอบด้วยผลสัมฤทธิ์ที่ผู้วิจัยสร้างขึ้น และผ่านการวิเคราะห์ข้อสอบแล้ว โดยใช้สถิติในการวิเคราะห์การทดสอบความแตกต่างของคะแนนก่อนเรียนและหลังเรียน (t-test : One – Group Pretest – Posttest)

วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

1. เพื่อสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ ช่วยสอน เรื่องวิชาเศรษฐศาสตร์วิศวกรรม บทที่ 1-4
2. เพื่อหาประสิทธิภาพของบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่สร้างขึ้น
3. เพื่อวิเคราะห์ผลสัมฤทธิ์ทางการเรียนหลังจากเรียนด้วยบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

สมมติฐานการวิจัย

1. บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่สร้างขึ้นมีประสิทธิภาพได้ตามเกณฑ์มาตรฐาน
2. หลังจากเรียนด้วยบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอนที่สร้างขึ้น นักศึกษามีความรู้เพิ่มมากขึ้นกว่าก่อนเรียน

สรุปผลการวิจัย

การวิจัยเรื่องการสร้างและหาประสิทธิภาพบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน เรื่องวิชากลศาสตร์วัสดุ บทที่ 3-6 ปรากฏผลดังนี้

1. บทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน มีค่าความคิดเห็นจากผู้เชี่ยวชาญด้านเนื้อหาอยู่ที่ระดับ 5.00 และด้านการผลิตสื่อการสอนอยู่ที่ระดับ 5.00 ถือว่าอยู่ในระดับดีมาก
2. ประสิทธิภาพของบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน เรื่องวิชากลศาสตร์วัสดุบทที่ 3-6 ได้เกณฑ์มาตรฐาน
3. หลังจากเรียนด้วยบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน นักศึกษามีความรู้เพิ่มขึ้นอย่างมีนัยสำคัญทางสถิติที่ระดับ 0.05

บรรณานุกรม

กังวล เทียนกัณฑ์เทศน์. 2540. **การวัด การวิเคราะห์ การประเมินทางการศึกษาเบื้องต้น**. กรุงเทพฯ: ศูนย์สื่อเสริมกรุงเทพ.

กฤษมันต์ วัฒนาณรงค์. 2536. **เทคโนโลยีเทคนิคศึกษา**. กรุงเทพมหานคร: ภาควิชาครุศาสตร์เทคโนโลยี คณะครุศาสตร์อุตสาหกรรม สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ.

กรมการศึกษานอกโรงเรียน. กระทรวงศึกษาธิการ. 2541. **วิจัยความต้องการบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน**. กรุงเทพมหานคร : บริษัทศูนย์การพิมพ์แก่นจันทร์ จำกัด.

คมพันธ์ ชมสมุทร . 2547. “ การสร้างและหาประสิทธิภาพบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน เรื่อง เรื่องการฝึกปฏิบัติงานบนเครื่องกลึงอัตโนมัติ. “ งานวิจัย สาขาวิชาเครื่องจักรอัตโนมัติ คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนคร .

ถนอมพร เลาหจรัสแสง. 2541. **คอมพิวเตอร์ช่วยสอน**. กรุงเทพ ฯ : ภาควิชาโสตทัศนศึกษา คณะครุศาสตร์ จุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย.

ทินกร จันทร์กระจ่าง . 2547. “ การสร้างและหาประสิทธิภาพบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน เรื่อง การฝึกปฏิบัติในงานโลหะวิทยา. “ งานวิจัย สาขาวิชาช่างโลหะ คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนคร .

บุญธรรม พ่วงลา . 2547. “ การสร้างและหาประสิทธิภาพบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน เรื่อง การฝึกปฏิบัติในงานไม้. “ งานวิจัย สาขาวิชาเทคนิคอุตสาหกรรม คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนคร .

ประเสริฐ วิโรจน์ชีวัน . 2547. “ การสร้างและหาประสิทธิภาพบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน เรื่อง การถอดประกอบปั้มฉีดน้ำมันเชื้อเพลิง เครื่องยนต์ดีเซล. “ งานวิจัย สาขาวิชาเครื่องกล คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนคร .

พิเชฐ จิรประเสริฐวงศ์ . 2547. “ การสร้างและหาประสิทธิภาพบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน เรื่อง การฝึกปฏิบัติการทดสอบวัสดุในทางวิศวกรรม. “ งานวิจัย สาขาช่างโลหะ คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนคร .

ล้วน สายยศ. และ อังคณา สายยศ. 2538 **เทคนิคการวิจัยทางการศึกษา**. พิมพ์ครั้งที่ 4. กรุงเทพ ฯ : สุวีริยาสาส์น.

สิงห์แก้ว ป๊อกเทิ่ง . 2547. “ การสร้างและหาประสิทธิภาพบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน เรื่อง เรื่องการฝึกปฏิบัติงานบนเครื่องกัดอัตโนมัติ. “ งานวิจัย สาขาวิชาเครื่องจักรอัตโนมัติ คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนคร .

สำเริง แพ่งศรี . 2547. “ การสร้างและหาประสิทธิภาพบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน เรื่อง การฝึกปฏิบัติลับดอกสว่านด้วยมือ. “ งานวิจัย สาขาวิศวกรรมอุตสาหการ คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนคร .

สำเริง แพ่งศรี . 2547. “ การสร้างและหาประสิทธิภาพบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน เรื่อง การฝึกปฏิบัติการกลึงงานขั้นพื้นฐาน. “ งานวิจัย สาขาวิศวกรรมอุตสาหการ คณะวิศวกรรมศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนคร .

เสาวณีย์ สิกขาบัณฑิต. 2528. **เทคโนโลยีทางการศึกษา**. กรุงเทพ ฯ : โรงพิมพ์สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าพระนครเหนือ.

Best , John W .1983. **Research in Education** . 4th ed. Englewood Cliffs , New Jersey : Practice Hall , Inc .

Gagne , R et al. 1988. **Principles of Instruction Design**. New York, NY : The Dryden Press.

ภาคผนวก

บันทึกข้อความ

ส่วนราชการ

ที่ **วันที่** 7 มิถุนายน 2553

เรื่อง ขอเชิญเป็นผู้เชี่ยวชาญตรวจสื่อการสอนด้านเทคนิคการผลิตในโครงการวิจัย ของมหาวิทยาลัย ฯ

เรียน อาจารย์มนต์ชัย นรเศรษฐ์สิงห์

ตามที่โครงการวิจัย " การสร้างและหาประสิทธิภาพบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน เรื่องวิชากลศาสตร์วัสดุบทที่ 3-6 " ปีงบประมาณ 2553 ได้รับอนุมัติให้ดำเนินการ ผู้วิจัยได้ปรึกษาผู้บริหารแผนกวิจัยและฝึกอบรมแล้วว่า อาจารย์มนต์ชัย นรเศรษฐ์สิงห์ มีคุณสมบัติเหมาะสมในการเป็นผู้เชี่ยวชาญตรวจสื่อการสอนด้านเทคนิคการผลิต เพื่อประกอบในการดำเนินโครงการวิจัยดังกล่าว

จึงเรียนมาเพื่อโปรดให้ความอนุเคราะห์ด้วย จักเป็นพระคุณยิ่ง

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ประเสริฐ วิโรจน์ชีวัน)
ผู้วิจัย

บันทึกข้อความ

ส่วนราชการ

ที่ **วันที่** 7 มิถุนายน 2553

เรื่อง ขอเชิญเป็นผู้เชี่ยวชาญตรวจสื่อการสอนด้านเนื้อหาของบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน ในโครงการวิจัยของ คณะวิศวกรรมศาสตร์

เรียน อาจารย์บรรพต ขุนจันทร์

ตามที่โครงการวิจัย " การสร้างและหาประสิทธิภาพบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน เรื่อง วิชากลศาสตร์วัสดุบทที่ 3-6 " ปีงบประมาณ 2553 ได้รับอนุมัติให้ดำเนินการ ผู้วิจัยได้ปรึกษาฝ่ายวิจัยและฝึกอบรมพิจารณาแล้วว่า อาจารย์บรรพต ขุนจันทร์ มีคุณสมบัติเหมาะสมในการเป็นผู้เชี่ยวชาญตรวจสื่อการสอนด้านเนื้อหาของบทเรียนคอมพิวเตอร์โครงการวิจัย ประกอบในการดำเนินโครงการวิจัยดังกล่าว

จึงเรียนมาเพื่อโปรดให้ความอนุเคราะห์ด้วย จักเป็นพระคุณยิ่ง

(ผู้ช่วยศาสตราจารย์ประเสริฐ วิโรจน์ชีวัน)
ผู้วิจัย

ขอบข่ายของเนื้อหาวิชา

ขอบข่ายของเนื้อหาวิชา เรื่องวิชากลศาสตร์วัสดุบทที่ 3-6 ได้แบ่งเนื้อหาการเรียนออกเป็นรายข้อดังนี้

บทที่ 1 เรื่องแรงที่กระทำตามแนวแกน

บทที่ 2 เรื่องการบิด

บทที่ 3 เรื่องแรงเฉือนและโมเมนต์ดัด

บทที่ 4 เรื่องความเค้นดัดในคาน

วัตถุประสงค์

1.เพื่อสร้างบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน เรื่องวิชาเศรษฐศาสตร์วิศวกรรม บทที่ 1-4

2. เพื่อหาประสิทธิภาพและเปรียบเทียบผลสัมฤทธิ์ทางการเรียน ของบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน เรื่องวิชากลศาสตร์วัสดุบทที่ 3-6

แบบประเมินสื่อการสอนด้านเนื้อหา

บทเรียนคอมพิวเตอร์ เรื่องวิชากลศาสตร์วัสดุบทที่ 3-6

บทเรียนคอมพิวเตอร์ที่ท่านกำลังประเมินอยู่นี้ มีคุณภาพอยู่ในระดับใดโปรดทำเครื่องหมาย ☐ ลงในช่องบอกระดับคุณภาพเพียงช่องเดียวตามความคิดเห็นของท่าน

1. หมายถึง ระดับความคิดเห็นเกี่ยวกับสื่อว่าควรมีการปรับปรุง
2. หมายถึง ระดับความคิดเห็นเกี่ยวกับสื่อว่ามีความถูกต้องชัดเจนหรือเหมาะพอใช้
3. หมายถึง ระดับความคิดเห็นเกี่ยวกับสื่อว่ามีความถูกต้องชัดเจนหรือเหมาะสมปานกลาง
4. หมายถึง ระดับความคิดเห็นเกี่ยวกับสื่อว่ามีความถูกต้องชัดเจนหรือเหมาะสมดี
5. หมายถึง ระดับความคิดเห็นเกี่ยวกับสื่อว่ามีความถูกต้องชัดเจนหรือเหมาะสมดีมาก

เรื่องที่จะประเมิน	ระดับความคิดเห็น					หมายเหตุ
	1	2	3	4	5	
1. เนื้อหาและการดำเนินเรื่อง						
1.1 เนื้อหามีความสอดคล้องกับจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม…	….	….	….	….	….	……...
1.2 ความชัดเจนถูกต้องของเนื้อหา ……	….	….	….	….	….	……
1.3 ความเหมาะสมในรูปแบบและวิธีการนำเสนอ ……	….	….	….	….	….	……
2. ภาพ						
2.1 คุณภาพของภาพ ……	….	….	….	….	….	……
2.2 ความเหมาะสมของภาพในการสื่อความหมาย……..	….	….	….	….	….	……
2.3 ความสัมพันธ์ระหว่างภาพกับเสียงบรรยาย ……	….	….	….	….	….	……
2.4 ความเหมาะสมของเทคนิคสร้างภาพในบทเรียน……	….	….	….	….	….	……
2.5 ความเหมาะสมของงานด้านกราฟฟิก ……..	….	….	….	….	….	……
3. เสียงและภาษา						
3.1 ความเหมาะสมของเสียงบรรยาย ……	….	….	….	….	….	……
3.2 ความชัดเจนของเสียงบรรยาย ……	….	….	….	….	….	……
3.3 ความถูกต้องของการใช้ภาษา ……	….	….	….	….	….	……
4. เวลา						
4.1 ความเหมาะสมของเวลาการนำเสนอกับเนื้อหาในภาพ…..	….	….	….	….	….	……
4.2 ความเหมาะสมของเวลาการนำเสนอกับเนื้อหาคำบรรยาย	….	….	….	….	….	……
4.3 ความเหมาะสมของเวลาการนำเสนอทั้งเรื่อง……..	….	….	….	….	….	……

ความคิดเห็นเรื่องอื่น ๆ ……

……..

……..

……..

ลงชื่อ ……ผู้ประเมิน

(……)

……/ ……/ ……

แบบประเมินสื่อการสอนด้านเทคนิคการผลิตสื่อ

บทเรียนคอมพิวเตอร์ เรื่องวิชากลศาสตร์วัสดุบทที่ 3-6

บทเรียนคอมพิวเตอร์ที่ท่านกำลังประเมินอยู่นี้ มีคุณภาพอยู่ในระดับใดโปรดทำเครื่องหมาย ☐ ลงในช่องบอกระดับคุณภาพเพียงช่องเดียวตามความคิดเห็นของท่าน

1. หมายถึง ระดับความคิดเห็นเกี่ยวกับสื่อว่าควรมีการปรับปรุง
2. หมายถึง ระดับความคิดเห็นเกี่ยวกับสื่อว่ามีความถูกต้องชัดเจนหรือเหมาะพอใช้
3. หมายถึง ระดับความคิดเห็นเกี่ยวกับสื่อว่ามีความถูกต้องชัดเจนหรือเหมาะสมปานกลาง
4. หมายถึง ระดับความคิดเห็นเกี่ยวกับสื่อว่ามีความถูกต้องชัดเจนหรือเหมาะสมดี
5. หมายถึง ระดับความคิดเห็นเกี่ยวกับสื่อว่ามีความถูกต้องชัดเจนหรือเหมาะสมดีมาก

เรื่องที่จะประเมิน	ระดับความคิดเห็น					หมายเหตุ
	1	2	3	4	5	
1. เนื้อหาและการดำเนินเรื่อง						
1.1 เนื้อหามีความสอดคล้องกับจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม…	….	….	….	….	….	……...
1.2 ความชัดเจนถูกต้องของเนื้อหา ……..	….	….	….	….	….	……
1.3 ความเหมาะสมในรูปแบบและวิธีการนำเสนอ ……	….	….	….	….	….	……
2. ภาพ						
2.1 คุณภาพของภาพ ……	….	….	….	….	….	……
2.2 ความเหมาะสมของภาพในการสื่อความหมาย……..	….	….	….	….	….	……
2.3 ความสัมพันธ์ระหว่างภาพกับเสียงบรรยาย ……..	….	….	….	….	….	……
2.4 ความเหมาะสมของเทคนิคสร้างภาพในบทเรียน……	….	….	….	….	….	……
2.5 ความเหมาะสมของงานด้านกราฟฟิก ……..	….	….	….	….	….	……
3. เสียงและภาษา						
3.1 ความเหมาะสมของเสียงบรรยาย ……	….	….	….	….	….	……
3.2 ความชัดเจนของเสียงบรรยาย ……	….	….	….	….	….	……
3.3 ความถูกต้องของการใช้ภาษา ……	….	….	….	….	….	……
4. เวลา						
4.1 ความเหมาะสมของเวลาการนำเสนอกับเนื้อหาในภาพ…..	….	….	….	….	….	……
4.2 ความเหมาะสมของเวลาการนำเสนอกับเนื้อหาคำบรรยาย	….	….	….	….	….	……
4.3 ความเหมาะสมของเวลาการนำเสนอทั้งเรื่อง……..	….	….	….	….	….	……

ความคิดเห็นเรื่องอื่น ๆ ……

……..

……..

……..

ลงชื่อ ……ผู้ประเมิน

(……)

……../ ……../ ……

เกณฑ์การประเมินสื่อการสอน

การประเมินความคิดเห็นจากการตอบแบบสอบถาม จากผู้เชี่ยวชาญด้วยหาค่าเฉลี่ยของข้อคำถามแต่ละข้อ แล้วหาผลรวมของค่าเฉลี่ยของแบบสอบถามทั้งฉบับ แล้วแปลความหมายของผลรวมค่าเฉลี่ยเพื่อหาเกณฑ์ค่าเฉลี่ยของบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

ในการแปลความหมายของค่าเฉลี่ยของการตอบแบบสอบถามตามช่วงของค่าเฉลี่ยความคิดเห็นของผู้เชี่ยวชาญตามแนวทางของเบสท์ (Best) ดังนี้ ค่าเฉลี่ยตั้งแต่

4.50 – 5.00 หมายถึง ผู้เชี่ยวชาญมีความเห็นว่าข้อคำถามนั้นอยู่ในเกณฑ์ดีมาก

3.50 – 4.49 หมายถึง ผู้เชี่ยวชาญมีความเห็นว่าข้อคำถามนั้นอยู่ในเกณฑ์ดี

2.50 – 3.49 หมายถึง ผู้เชี่ยวชาญมีความเห็นว่าข้อคำถามนั้นอยู่ในเกณฑ์ใช้ได้

1.50 – 2.49 หมายถึง ผู้เชี่ยวชาญมีความเห็นว่าข้อคำถามนั้นอยู่ในเกณฑ์ควรปรับปรุง

1.00 – 1.49 หมายถึง ผู้เชี่ยวชาญมีความเห็นว่าข้อคำถามนั้นอยู่ในเกณฑ์ใช้ไม่ได้

ผลการประเมินสื่อการสอนจากผู้เชี่ยวชาญ ด้านเนื้อหา

เรื่องที่จะประเมิน	ผู้ประเมินเรียงตามรายชื่อ				$\overline{X}$
	1	2	3	4	
1. เนื้อหาและการดำเนินเรื่อง					
1.1 เนื้อหามีความสอดคล้องกับจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม	5	5	-	-	5.0
1.2 ความถูกต้องของเนื้อหา	5	5	-	-	5.0
1.3 ความถูกต้องในการลำดับเนื้อหาตามขั้นตอน	5	5	-	-	5.0
1.4 ความสอดคล้องของเนื้อหาแต่ละตอน	5	5	-	-	5.0
1.5 ความชัดเจนในการอธิบายเนื้อหา	5	5	-	-	5.0
1.6 ความเหมาะสมกับระดับผู้เรียน	5	5	-	-	5.0
2. รูปภาพและภาษา					
2.1 ความถูกต้องของรูปภาพตามเนื้อหา.....	5	5	-	-	5.0
2.2 ความถูกต้องของภาษาที่ใช้	5	5	-	-	5.0
2.3 ความสอดคล้องระหว่างรูปภาพกับคำบรรยาย	5	5	-	-	5.0
3. เวลาในการนำเสนอ					
3.1 ความเหมาะสมของเวลานำเสนอกับเนื้อหาในภาพ ...	5	5	-	-	5.0
3.2 ความเหมาะสมของเวลานำเสนอกับเนื้อหาคำบรรยาย	5	5	-	-	5.0
3.3 ความเหมาะสมของเวลาที่นำเสนอทั้งเรื่อง	5	5	-	-	5.0
$\overline{X}$	5	5	-	-	5.0

ตารางที่ 3 ผลการประเมินสื่อการสอนจากผู้เชี่ยวชาญ ด้านเนื้อหา

ผลการประเมินสื่อการสอนจากผู้เชี่ยวชาญ ด้านเทคนิคการผลิตสื่อ

เรื่องที่จะประเมิน	ผู้ประเมินเรียงตามรายชื่อ				$\overline{X}$
	1	2	3	4	
1. เนื้อหาและการดำเนินเรื่อง					
1.1 เนื้อหามีความสอดคล้องกับจุดมุ่งหมายเชิงพฤติกรรม	5	5	-	-	5.0
1.2 ความชัดเจนถูกต้องของเนื้อหา	5	5	-	-	5.0
1.3 ความเหมาะสมในรูปแบบและวิธีนำเสนอ	5	5	-	-	5.0
2. ภาพ					
2.1 คุณภาพของภาพ	5	5	-	-	5.0
2.2 ความเหมาะสมของภาพในการสื่อความหมาย	5	5	-	-	5.0
2.3 ความสัมพันธ์ระหว่างภาพกับเสียงบรรยาย	5	5	-	-	5.0
2.4 ความเหมาะสมของเทคนิคสร้างภาพในบทเรียน	5	5	-	-	5.0
2.5 ความเหมาะสมของงานด้านกราฟฟิก	5	5	-	-	5.0
3. เสียงและภาษา					
3.1 ความเหมาะสมของเสียงบรรยาย	5	5	-	-	5.0
3.2 ความชัดเจนของเสียงบรรยาย	5	5	-	-	5.0
3.3 ความถูกต้องของการใช้ภาษา	5	5	-	-	5.0
4. เวลา					
4.1 ความเหมาะสมของเวลาการนำเสนอกับเนื้อหาในภาพ	5	5	-	-	5.0
4.2 ความเหมาะสมของเวลาการนำเสนอกับเนื้อหาคำบรรยาย	5	5	-	-	5.0
4.3 ความเหมาะสมของเวลาการนำเสนอทั้งเรื่อง	5	5	-	-	5.0
$\overline{X}$	5	5	-	-	5.0

ตารางที่ 4 ผลการประเมินสื่อการสอนจากผู้เชี่ยวชาญ ด้านเทคนิคการผลิตสื่อ

แสดงผลการวิเคราะห์ความเที่ยงตรงของแบบทดสอบกับวัตถุประสงค์

ข้อ	ผู้เชี่ยวชาญประเมิน		ผลค่า	ข้อ	ผู้เชี่ยวชาญประเมิน		ผลค่า
	คนที่ 1	คนที่ 2	O.V.		คนที่ 1	คนที่ 2	O.V.
1	1	1	1	21	1	1	1
2	1	1	1	22	1	1	1
3	1	1	1	23	1	1	1
4	1	1	1	24	1	1	1
5	1	1	1	25	1	1	1
6	1	1	1	26	1	1	1
7	1	1	1	27	1	1	1
8	1	1	1	28	1	1	1
9	1	1	1	29	1	1	1
10	1	1	1	30	1	1	1
11	1	1	1				
12	1	1	1				
13	1	1	1				
14	1	1	1				
15	1	1	1				
16	1	1	1				
17	1	1	1				
18	1	1	1				
19	1	1	1				
20	1	1	1				

ตารางที่ 5 ผลการวิเคราะห์ความเที่ยงตรงของแบบทดสอบกับวัตถุประสงค์

<u>สรุปผล</u> แบบทดสอบเรื่องวิชากลศาสตร์วัสดุบทที่ 3-6

ทุกข้อตรงวัตถุประสงค์การสอน

แสดงผลการประเมิน หาค่าความยากง่ายของแบบทดสอบ เรื่องวิชากลศาสตร์วัสดุบทที่ 3-6

ระดับ ปริญญาตรี ชั้นปีที่ 2 สาขาเครื่องกล วศ.บ 4 ปี ชั้นปีที่ 1 ประจำปีการศึกษา 1 / 2553

ที่	รหัส	ข้อทดสอบที่ (30 ข้อ)																														รวม 30
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	
1	055250401001-8	1	0	1	0	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	1	1	13
2	055250401002-6	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	1	12
3	055250401003-4	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	7
4	055250401004-3	1	1	0	1	1	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	18
5	055250401008-3	0	0	1	1	1	1	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	0	0	17
6	055250401009-1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	7
7	055250401010-9	0	1	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	1	0	1	0	1	0	1	1	1	1	20
8	055250401011-7	0	1	1	0	0	1	1	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	1	1	0	1	1	14
9	055250401012-5	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	7
10	055250401013-3	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	4
11	055250401014-1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	0	1	1	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	1	1	16
12	055250401016-6	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	0	0	13
13	055250401017-4	0	0	1	1	0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	12
14	055250401018-2	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	1	1	12
15	055250401019-0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	1	10
16	055250401020-8	1	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	1	1	0	1	0	1	0	1	12
17	055250401022-4	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	5
18	055250401023-2	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	6
19	055250401024-0	0	1	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	1	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	10
20	055250401025-7	1	0	1	1	0	1	0	1	0	0	1	0	0	1	0	1	1	1	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	12
21	055250401026-5	0	0	1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	1	0	0	1	7
22	055250401027-3	0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	1	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	0	1	0	0	1	9

ตารางที่ 6 แสดงผลการประเมินหาค่าความยากง่ายของแบบทดสอบ เรื่องวิชากลศาสตร์วัสดุบทที่ 3-6

23	055250401028-1	1	0	1	0	0	1	0	0	0	1	0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	0	1	0	0	0	0	1	0	0	1	9
24	055250401029-9	0	0	1	0	1	0	0	1	1	1	1	0	0	0	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1	0	0	1	0	1	1	12
25	055250401030-7	0	0	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	1	1	0	0	1	0	0	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	15
26	055250401031-5	0	0	1	1	0	0	0	0	0	1	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	5
รวมคะแนนรายข้อ (R)		6	7	18	12	7	10	6	6	10	10	8	5	7	9	14	12	14	9	6	9	7	6	10	6	6	6	19	11	10	18	
ค่าความยากง่าย (0.2 - 0.8)		0.2	0.3	0.7	0.5	0.3	0.4	0.2	0.2	0.4	0.4	0.3	0.2	0.3	0.3	0.5	0.5	0.5	0.3	0.2	0.3	0.3	0.2	0.4	0.2	0.2	0.2	0.7	0.4	0.4	0.7	

ตารางที่ 6 แสดงผลการประเมินหาค่าความยากง่ายของแบบทดสอบ เรื่องวิชากลศาสตร์วัสดุบทที่ 3-6

พิจารณาข้อสอบที่มีค่า ความยากง่าย = 0.2 - 0.8

<u>หมายเหตุ</u> ช่องคะแนน 0 = ทำผิด

ช่องคะแนน 1 = ทำถูก

<u>สูตร ค่าความยากง่าย</u> P = R / N

R = จำนวนคนที่ทำถูก

N = จำนวนคนทั้งหมด = 26 คน

แสดงผลค่าอำนาจจำแนกของแบบทดสอบ

ระดับปริญญาตรี วศ.บ.4 ปี ชั้นปีที่ รอบปกติ สาขาเครื่องกล ประจำปีการศึกษา 1 / 2553

รายการ	ข้อทดสอบที่ (30 ข้อ)																														
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
รวมคะแนนรายข้อ(RU)	3	3	7	5	5	4	3	5	4	4	5	3	4	4	6	5	5	4	5	5	3	3	4	5	3	5	7	5	5	7
รวมคะแนนรายข้อ(RL)	1	1	5	3	1	2	1	0	2	2	0	1	2	2	3	3	3	2	0	3	1	0	2	0	1	0	5	3	3	5
N / 2	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
ค่าอำนาจจำแนก (D)	0.2	0.2	0.2	0.2	0.4	0.2	0.2	0.6	0.2	0.2	0.6	0.2	0.2	0.2	0.3	0.2	0.2	0.2	0.6	0.2	0.2	0.3	0.2	0.6	0.2	0.6	0.2	0.2	0.2	0.2

ตารางที่ 10 แสดงผลค่าอำนาจจำแนกของแบบทดสอบ

สูตร ค่าอำนาจจำแนก = $\frac{RU - RL}{N / 2}$

พิจารณาข้อสอบที่มี ค่าอำนาจจำแนก ตั้งแต่ 0.2 ขึ้นไป

สรุป แบบทดสอบที่ใช้ในการวิจัยทุกข้อ มีค่าตั้งแต่ 0.2 ขึ้นไป

t-Test: Two-Sample Assuming Equal Variances

	Pre-test	*Post-test*
Mean	15.03846154	23.92307692
Variance	7.478461538	6.233846154
Observations	26	26
Pooled Variance	6.856153846	
Hypothesized Mean Difference	0	
df	50	
t Stat	-12.2340438	
P(T<=t) one-tail	5.96244E-17	
t Critical one-tail	1.675905423	
P(T<=t) two-tail	1.19249E-16	
t Critical two-tail	2.008559932	

อ่านค่า

ค่า T Start มีค่าน้อยกว่า t Critical one tail (-12.234 < 1.675) แสดงว่าผลการทดสอบ Post-tes ของการทดลองนี้มีค่าเฉลี่ยดีกว่า Pre-test อย่างามีนัยสำคัยที่ระดับความเชื่อมั่นทางสถิติ 95%

ผลการคำนวณหาค่าความเชื่อมั่นของแบบทดสอบ

เรื่องวิชากลศาสตร์วัสดุบทที่ 3-6

$$S_{pq} = 6.1 \quad , \quad S_X = 284 \quad , \quad S_{X^2} = 3,552$$

คำนวณค่า $S^2_t = \dfrac{N S_{X^2} - (S_X)^2}{N^2}$

$$= \dfrac{26 \times 3,552 - (284)^2}{26 \times 26}$$

$$= 17.30$$

จาก $$r_{tt} = \dfrac{n}{n-1}\left[1 - \dfrac{S_{pq}}{S^2_t}\right]$$

เมื่อ r_{tt} คือ ความเชื่อมั่นของแบบทดสอบทั้งฉบับ

N คือ จำนวนข้อของเครื่องมือวัด

p คือ สัดส่วนของผู้ทำได้ในข้อหนึ่ง ๆ นั่นคือสัดส่วนของคนทำถูกกับคนทั้งหมด

q คือ สัดส่วนของผู้ที่ทำผิดในข้อหนึ่ง ๆ หรือ คือ 1 – p

S^2_t คือ คะแนนความแปรปรวนของเครื่องมือทั้งฉบับ

แทนค่า r_{tt} $$= \dfrac{30}{30-1}\left[1 - \dfrac{6.1}{17.30}\right] = 0.67$$

ดังนั้นแบบทดสอบฉบับนี้ มีความเชื่อมั่น = 0.67

ผลการคำนวณวิเคราะห์หาประสิทธิภาพของบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน

สถิติที่ใช้ในการหาประสิทธิภาพของบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน โดยใช้สูตร (เสาวณีย์ , 2528 : 284)

$$\text{ประสิทธิภาพ ฯ} = \frac{M_2 - M_1}{P - M_1} + \frac{M_2 - M_1}{P}$$

M_1 = ผลของคะแนนเฉลี่ยจากการสอบก่อนการเรียน (Pre - tese)

M_2 = ผลของคะแนนเฉลี่ยจากการสอบหลังการเรียน (Post - test)

P = คะแนนเต็มของข้อทดสอบ

ค่าของอัตราส่วนที่ได้จากสูตรนี้ จะมีค่าระหว่าง 0 – 2 ถ้าค่าที่หาออกมาได้มีค่ามากกว่า 1 ถือว่า บทเรียนคอมพิวเตอร์นั้นได้เกณฑ์มาตรฐาน

แทนค่า M_1 = 15.038

M_2 = 23.923

P = 30

$$\text{ประสิทธิภาพ ฯ} = \frac{23.923 - 15.038}{30 - 15.038} + \frac{23.923 - 15.038}{30}$$

$$= 0.593 + 1.298$$

$$= 1.891$$

ค่าที่ได้ = 1.891 ดังนั้นบทเรียนคอมพิวเตอร์ช่วยสอน เรื่องวิชากลศาสตร์วัสดุบทที่ 3-6 ได้เกณฑ์มาตรฐาน

ลักษณะรายวิชา

04-212-202 กลศาสตร์วัสดุ 1 3(3-0-6)

Mechanics of Materials 1

รายวิชาที่ต้องเรียนมาก่อน : -

รายวิชาที่ต้องเรียนควบคู่ : -

ศึกษาเกี่ยวกับความเค้นและความเครียด ความสัมพันธ์ระหว่างความเค้น และความเครียด ความเค้นที่เกิดจากอุณหภูมิ ภาชนะอัดความดันและการเชื่อมต่อ การบิดตัวของเพลาตัน และเพลากลวง การเขียนไดอะแกรมแรงเฉือน และโมเมนต์ดัด การคำนวณหาค่าความเค้นดัด และความเค้นเฉือนในคาน พร้อมทั้งการหาค่าระยะโก่งที่เกิดขึ้นในคานโดยใช้วิธีอื่น ๆ

แบบทดสอบ เรื่องวิชากลศาสตร์วัสดุบทที่

คำสั่ง ข้อสอบมีทั้งหมด 30 ข้อ

เลือกคำตอบที่ถูกที่สุด

1. ความเค้นคืออะไร

ก. ภาระต่อหน่วยพื้นที่

ข. แรงต้านทานภายในต่อหน่วยพื้นที่

ค. แรงภายในที่กระทำต่อวัสดุต่อหน่วยพื้นที่

ง. ความต้านทานภายในที่เกิดขึ้นโดยวัสดุต่อหน่วยพื้นที่

2. หน่วยของความเค้นในระบบ SI คือ ข้อใด

ก. bar ค. kgf/mm^2

ข. N/m^2 ง. kgm/mm^2

3. การเปลี่ยนแปลงความยาวเนื่องจากแรงดึงหรือแรงอัดที่กระทำบนวัตถุ กำหนดด้วยสมการใด

ก. $\frac{PL}{AE}$ ค. $\frac{E}{PLA}$

ข. $\frac{LPA}{E}$ ง. $\frac{AE}{PL}$

4. มอดุลัสของยัง (Young's modulus) กำหนดด้วยอัตราส่วนของอะไร

ก. ความเค้นตามแนวแกนต่อความเครียดแนวขวาง

ข. ความเครียดแนวขวางต่อความเครียดแนวแกน

ค. ความเค้นแนวแกนต่อความเครียดแนวแกน

ง. ความเค้นเฉือนต่อความเครียดเฉือน

5. อัตราส่วนของความเครียดในแนวขวางต่อความเครียดในแนวแกน เรียกว่าอะไร

ก. modulus of elasticity

ข. modulus of rigidity

ค. Poisson's to ratio

ง. bulk modulus

6. มอดุลัสเฉือน (shear modulus) คือ อัตราส่วนของอะไร

ก. ความเค้นแนวแกนต่อความเครียดแนวแกน

ข. ความเค้นเฉือนต่อความเครียดเฉือน

ค. ความเค้นในแนวแกนต่อความเครียดขวาง

ง. ความเครียดเชิงปริมาตรต่อความเค้นในแนวแกน

7. หน่วยของความเครียด (strain) คือ อะไร

ก. $\mathrm{kgf/cm}$ ค. mm

ข. $\mathrm{kgf/cm^2}$ ง. ไม่มีหน่วย

8. ความเครียดมีค่าเท่ากับข้อใด

ก. $\frac{L}{\delta L}$ ค. $\delta L.L$

ข. $\frac{\delta}{L}$ ง. ไม่มีคำตอบ

9. เมื่อความยาวมีการเปลี่ยนแปลง ความเครียดนี้เรียกว่าอะไร

ก. ความเครียดแนวแกน (linear strain)

ข. ความเครียดแนวขวาง (lateral strain)

ค. ความเครียดเฉือน (shear strain)

ง. ความเครียดเชิงปริมาตร (volumetric strain)

10. แท่งวัสดุยาว L เมตร เมื่อมีแรงดึง P มากระทำ ส่งผลให้แท่งวัสดุยืดออก 1 มิลลิเมตร จงหาค่าความเครียดที่เกิดขึ้น

ก. $0.01\times 1/L$ ค. $0.001\times 1/L$

ข. $0.1\times 1/L$ ง. $1/L$

11. สมการแรงบิดของเพลากลมคือข้อใด

ก. $\frac{T}{J}=\frac{\tau}{L}=\frac{G\theta}{R}$

ข. $\frac{T}{J}=\frac{\tau}{R}=\frac{G\theta}{L}$

ค. $\frac{T}{R}=\frac{\tau}{J}=\frac{G\theta}{L}$

ง. $\frac{T}{L}=\frac{\tau}{J}=\frac{G\theta}{R}$

12. ความแข็งเกร็งของการบิด (torsional rigidity) ของเพลากลม คือข้อใด

ก. $\frac{T}{J}$ ค. $\frac{T}{\theta}$

ข. $\frac{T}{R}$ ง. $\frac{T}{L}$

13. เพลากลมที่อยู่ภายใต้แรงบิด ความเค้นเฉือนจะมีการเปลี่ยนแปลงลักษณะเป็นอย่างไร

ก. รูปพาราโบลิก ค. เส้นตรง

ข. สม่ำเสมอ ง. ไฮเปอร์บอลิก

14. ความเค้นเฉือนที่ผิวนอกสุดของเพลากลม ที่อยู่ภายใต้แรงบิด จะมีค่าเป็นเท่าไร

ก. ศูนย์ ค. น้อยที่สุด

ข. มากที่สุด ง. หาค่าไม่ได้

15. ความเค้นเฉือนที่จุดศูนย์กลางของเพลากลม ที่อยู่ภายใต้แรงบิดจะมีค่าเป็นเท่าไร

ก. ศูนย์ ค. น้อยที่สุด

ข. มากที่สุด ง. หาค่าไม่ได้

16. สภาวะที่ถูกต้อง เมื่อเพลาสองเพลาทำจากวัสดุชนิดเดียวกัน มีขนาดต่างกัน ต่อแบบอนุกรมกัน และมีแรงบิดคงตัวกระทำที่ปลายเพลา ข้อใดถูก

ก. ความเค้นเฉือนในเพลาแต่ละอันมีค่าเท่ากัน

ข. แรงบิดในเพลาแต่ละอันมีค่าเท่ากัน

ค. มุมบิดในเพลาแต่ละอันมีค่าเท่ากัน

ง. ไม่มีข้อใดถูก

17. สภาวะที่ถูกต้อง เมื่อเพลาตันสอดอยู่ในเพลากลวง และมีแผ่นเหล็กแข็งเกร็งเชื่อมยึดปลายเพลากลวงและเพลาตันเข้าด้วยกัน ข้อใดถูก

ก. ความเค้นเฉือนในเพลาแต่ละอันมีค่าเท่ากัน

ข. แรงบิดในเพลาแต่ละอันมีค่าเท่ากัน

ค. มุมบิดในเพลาแต่ละอันมีค่าเท่ากัน

ง. ไม่มีข้อใดถูก

18. เพลาสองเพลาที่มีความยาว ขนาด วัสดุ และน้ำหนักเท่ากัน แรงบิดที่ส่งถ่ายด้วยเพลาตันเมื่อเปรียบเทียบกับเพลากลวง ข้อใดถูก

ก. เพลาตันส่งถ่ายได้มากกว่า

ข. เพลาตันส่งถ่ายแรงบิดได้น้อยกว่า

ค. ส่งถ่ายแรงบิดได้เท่ากัน

ง. ไม่มีข้อใดถูก

19. เพลาที่ถูกบิดทำให้เกิดมุมบิดขึ้นค่าหนึ่ง ความเค้นเฉือนที่เกิดขึ้นมีลักษณะอย่างไร

ก. มากถ้าความยาวน้อย

ข. น้อยถ้าความยาวน้อย

ค. มากถ้าความยาวมาก

ง. ไม่มีข้อใดถูก

20. หน่วยขอแรงบิด (torque) ในระบบ SI คือ ข้อใด

ก. kg-m ค. N-m

ข. kg/m^2 ง. N/m

21. โมเมนต์ดัดที่ปลายอิสระของคานยื่น มีค่าเป็นเท่าไร

ก. ศูนย์ ค. มีค่ามากที่สุด

ข. มีค่าน้อยที่สุด ง. หาค่าไม่ได้

22. แผนภาพของแรงเฉือนของคานยื่นที่มีความยาว L และรับน้ำหนักแบบกระจายสม่ำเสมอมีค่า w ต่อหน่วยความยาว จะมีลักษณะเป็นอย่างไร

ก. รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ข. รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านเท่ากันสองด้าน

ค. รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านเท่ากันทุกด้าน

ง. รูปสี่เหลี่ยม

23. แผนภาพแรงเฉือนของคานยื่นที่มีความยาว L และรับน้ำหนักที่มีการเปลี่ยนแปลงอย่างสม่ำเสมอจากค่าศูนย์ที่ปลายอิสระ และมีค่า w ต่อหน่วยความยาวที่จุดยึดแน่น จงหาลักษณะแผนภาพของแรงเฉือน

ก. เส้นตรงในแนวนอน

ข. เส้นตรงในแนวตั้ง

ค. เส้นเอียง

ง. เส้นโค้งพาราโบลิก

24. ค่าโมเมนต์ดัดสูงสุดของคานที่รองรับอย่างง่ายที่มีความยาว L และรับน้ำหนักแบบจุด W กระทำที่จุดกึ่งกลางคาน คือค่าใด

ก. $\frac{WL}{4}$ ค. WL

ข. $\frac{WL}{2}$ ง. $\frac{WL^2}{4}$

25. แผนภาพของโมเมนต์ดัดสำหรับคานที่มีการรองรับอย่างง่าย ที่มีภาระกระทำตรงจุดกึ่งกลางคานมีลักษณะเป็นอย่างไร

ก. รูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

ข. รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านเท่ากันสองด้าน

ค. รูปสามเหลี่ยมที่มีด้านเท่ากันทุกด้าน

ง. รูปสี่เหลี่ยม

26. ค่าโมเมนต์ดัดที่จุดกึ่งกลางของคานที่มีการรองรับอย่างง่าย รับภาระที่กระจายอย่างสม่ำเสมอ w ต่อหน่วยความยาวคาน คือค่าใด

ก. 0 ค. $\frac{wL^2}{2}$

ข. $\frac{wL}{2}$ ง. $\frac{wL^2}{4}$

27. แผนภาพโมเมนต์ดัดสำหรับ คานที่มีการรองรับอย่างง่าย รับภาระที่กระจายอย่างสม่ำเสมอ w ต่อหน่วยความยาวคาน มีลักษณะเป็นอย่างไร

ก. เส้นตรงในแนวนอน

ข. เส้นตรงในแนวตั้ง

ค. เส้นเอียง

ง. เส้นโค้งพาราโบลิก

28. จุดที่เรียกว่า contraflexure อยู่ที่จุดใด

ก. แรงเฉือนเปลี่ยนเครื่องหมาย

ข. โมเมนต์ดัดเปลี่ยนเครื่องหมาย

ค. แรงเฉือนมีค่ามากที่สุด

ง. โมเมนต์ดัดมีค่ามากที่สุด

29. เมื่อมีการเพิ่มขึ้นหรือลดลงอย่างทันทีทันใดของแผนภาพแรงเฉือนระหว่างจุดสองจุด แสดงว่ามีอะไรเกิดขึ้น

ก. ภาระแบบจุดที่จุดทั้งสอง

ข. ไม่มีภาระกระทำระหว่างจุดทั้งสอง

ค. ภาระกระจายสม่ำเสมอระหว่างจุดทั้งสอง

ง. ภาระเปลี่ยนแปลงอย่างสม่ำเสมอระหว่างจุดทั้งสอง

30. คานที่มีปลายด้านหนึ่งยึดแน่น อีกด้านหนึ่งเป็นอิสระ เรียกคานชนิดนี้ว่าอะไร

ก. คานยื่น (cantilever beam)

ข. คานที่มีปลายทั้งสองด้านยื่นเลยจุดรองรับ (overhanging beams)

ค. คานที่มีการรองรับอย่างง่าย (simply supported beam)

ง. คานยึดแน่น (fixed beam)

เฉลย

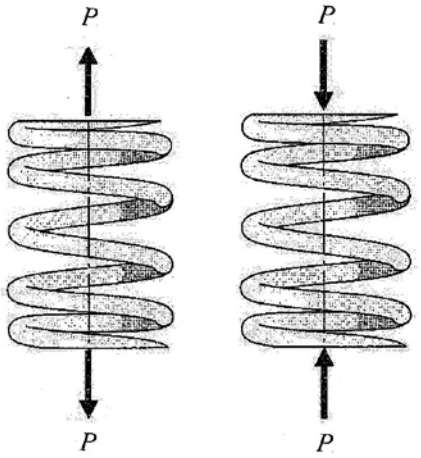
1. ข	2. ข	3. ก	4. ค	5. ค	6. ข	7. ง	8. ข	9. ก	10. ค
11. ข	12.ค	13.ค	14.ข	15.ก	16.ง	17.ค	18.ก	19. ก	20.ค
21.ก	22. ก	23.ง	24. ก	25.ข	26.ง	27.ง	28.ข	29.ก	30.ก

บทดำเนินเรื่องงานวิจัย
บทที่ 3
แรงที่กระทำตามแนวแกน
(AXIALLY LOADED MEMBERS)

ชิ้นส่วนวัสดุที่ถูกแรงกระทำ ๆ ให้เกิดการดึงหรือการกกด เรียกว่า ชิ้นส่วนที่ถูกกระทำตามแนวแกน เช่น แท่งวัสดุตัน นอกจากนี้ยังมีสายเคเบิ้ล หรือขดลวดสปริงที่มีแรงกระทำตามแนวแกนด้วย

3.1 การเปลี่ยนแปลงความยาวของชิ้นส่วนวัสดุที่มีแรงกระทำตามแนวแกน
(Change in Length of Axially Loaded Members)

เมื่อชิ้นวัสดุมีแรงกระทำตามแนวแกนจะส่งผลให้เกิดการยืดหรือหดตัว ยกตัวอย่างเช่น ขดลวดสปริงดังแสดงในรูปที่ 3.1 ถ้ามีแรงมากระทำตามแนวแกนจะส่งผลให้เกิดการยืดออก เรียกว่า **สปริงอยู่ภายใต้แรงดึง** (tension) และถ้าสปริงหดสั้นลงเรียกว่า **สปริงอยู่ภายให้แรงอัด**(compression)



รูปที่ 3.1 สปริงที่มีแรง P กระทำตามแนวแกนทำให้เกิดแรงดึงและแรงอัด

3.2 **สปริง** (Spring)

การยืดตัวของสปริงดังรูปที่ 3.2 รูปด้านบนแสดงสปริงที่มีความยาว L ตามปกติ (natural length) หรือเรียกว่า **ความยาวที่ไม่มีความเค้น** (unstressed length, relaxed length) หรือ **ความยาวอิสระ** (free length) รูปล่างแสดงสปริงที่ถูกแรงดึง P กระทำ ๆ ให้สปริงยืดออกเป็นระยะ δ ความยาวสุดท้ายจะเป็น $L+\delta$ ถ้าวัสดุที่ใช้ทำสปริงอยู่ในช่วงของความยืดหยุ่นเชิงเส้นแรงกระทำกับระยะยืดจะเป็นสัดส่วนกันดังนี้

$$P = k\delta \tag{3.1ก}$$

$$\delta = fP \tag{3.1ข}$$

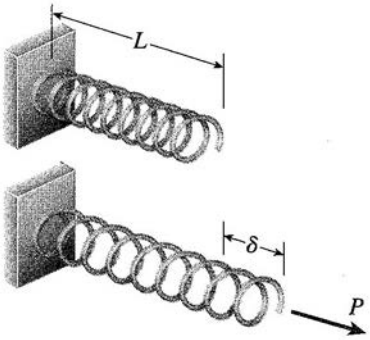
เมื่อ k และ f เป็นค่าคงตัว ค่าคงตัว k เรียกว่า **ความแข็งตึงของสปริง** (stiffness of spring) กำหนดเป็นความต้องการเพื่อทำให้เกิดการยืดตัวออกหนึ่งหน่วย นั้นคือ $k = P/\delta$ ในทำนองเดียวกันค่าคงตัว f เรียกว่า **ความงอได้**(flexibility) และกำหนดเป็นการยืดที่เกิดขึ้นจากแรงหนึ่งหน่วย นั้นคือ $f = \delta/P$ ค่าความแข็งตึงของสปริงและความยืดหยุ่นของสปริงเป็นค่ากลับไปกลับมาของกันและกัน

$$k = \frac{1}{f} \tag{3.2ก}$$

$$f = \frac{1}{k} \tag{3.2ข}$$

3.3 **แท่งวัสดุที่มีหน้าตัดเท่ากันตลอด** (Prismatic Beams)

พิจารณาแท่งวัสดุดังรูปที่ 3.3 ซึ่งเป็นแท่งวัสดุที่มีหน้าตัดเท่ากันตลอดความยาวหรืออาจจะเป็นหน้าตัดรูปร่างต่าง ๆ ดังรูปที่ 3.4



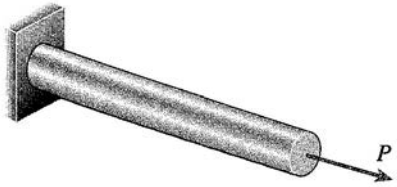
รูปที่ 3.2 การยืดของสปริงที่มีแรงกระทำตามแนวแกน

ระยะยืด δ ของแท่งวัสดุเนื่องจากแรง P กระทำผ่านจุดศูนย์ถ่วงของพื้นที่หน้าตัด ความเค้นตั้งฉากสม่ำเสมอที่กระจายบนพื้นที่หน้าตัดหาได้จากสมการ $\sigma = P/A$ เมื่อ A เป็นพื้นที่หน้าตัด ถ้าแท่งวัสดุทำจากวัสดุเนื้อเดียวกัน ความเครียดตามแนวแกนจะเป็น $\varepsilon = \delta/L$ เมื่อระยะ δ เป็นระยะยืด และ L เป็นความยาวของแท่งวัสดุ ถ้าสมมุติว่าวัสดุอยู่ในช่วงการยืดหยุ่นเชิงเส้นตรง ซึ่งหมายความว่าสามารถใช้กฎของฮุกแสดงความสัมพันธ์ของความเค้นและความเครียดได้เป็น $\sigma = E\varepsilon$ เมื่อ E เป็นค่ามอดุลัสของความยืดหยุ่น เมื่อรวมความสัมพันธ์เหล่านี้เข้าด้วยกันจะได้

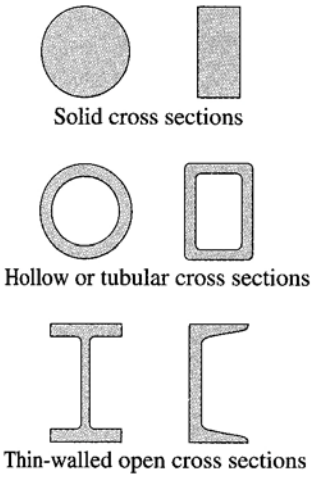
$$\delta = \frac{PL}{AE} \tag{3.3}$$

สมการนี้แสดงให้เห็นว่าการยืดเป็นสัดส่วนโดยตรงกับแรง P และความยาว L แต่เป็นส่วนกลับกับค่ามอดุลัส E และพื้นที่หน้าตัด A ค่า EA เรียกว่า **ความแข็งแกร็ง** (axial rigidity)

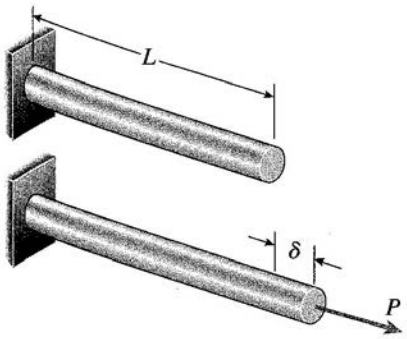
อย่างไรก็ตามสมการ (3.3) พิสูจน์จากแรงดึงในแท่งวัสดุ แรงที่เท่ากันนี้อาจจะกระทำกับแท่งวัสดุเป็นการอัด ซึ่งจะทำให้แท่งวัสดุหดสั้นลงเป็นระยะ δ เราสามารถรู้ได้โดยสังเกตแท่งวัสดุว่ายืดยาวขึ้นหรือหดสั้นลงหรือกำหนดเครื่องหมายโดยการยืดมักจะเป็นเครื่องหมายบวกและการหดสั้นลงจะเป็นลบดังรูปที่ 3.5



รูปที่ 3.3 แท่งวัสดุที่มีหน้าตัดเท่ากันตลอด



รูปที่ 3.4 หน้าตัดแบบต่าง ๆ ของชิ้นส่วนโครงสร้าง



รูปที่ 3.5

4 **การเปลี่ยนแปลงความยาวของคานที่มีหน้าตัดไม่สม่ำเสมอ**

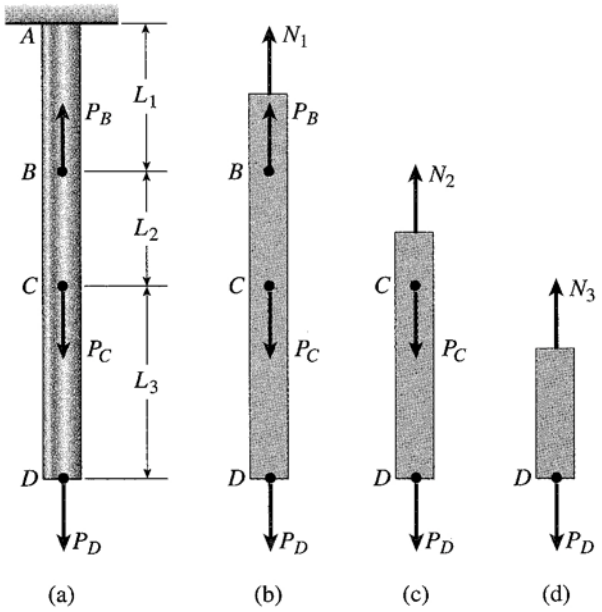
(Changes in Lengths of Nonuniform Bars)

แท่งวัสดุที่มีหน้าตัดเท่ากันตลอดเป็นวัสดุที่มีความยืดหยุ่นอยู่ในช่วงที่เป็นเส้นตรงถูกกระทำด้วยแรงภายนอกที่ปลายของแท่งวัสดุ เราสามารถหาการเปลี่ยนแปลงขนาดของความยาวได้จากสมการ $\delta = \dfrac{PL}{AE}$

สมมุติแท่งวัสดุถูกกระทำด้วยแรงตามแนวแกนหนึ่งแรงหรือมากกว่าหนึ่งแรงที่อยู่ระหว่างปลายทั้งสองด้านดังรูปที่ 3.7(ก) เราสามารถหาการเปลี่ยนแปลงของความยาวของแท่งวัสดุได้โดยการบวกทางพีชคณิตของส่วนที่ยืดออกและส่วนที่หดสั้นลงของแท่งวัสดุในแต่ละส่วนดังนี้

1. แบ่งแท่งวัสดุออกเป็นส่วน ๆ (เช่น ส่วนของแท่งวัสดุ $AB, BC,$ และ CD) เป็นส่วนที่ $1, 2,$ และ 3
2. หาแรงตามแนวแกนที่เกิดขึ้นภายในแท่งวัสดุ $N_1, N_2,$ และ N_3 ที่เกิดขึ้นกับส่วนของ แท่งวัสดุ $1, 2,$ และ 3

จากแผนภาพรูปอิสระของรูปที่ 3.7(ข) (ค) และ (ง) แรงตามแนวแกนภายในเนื้อวัสดุแสดงด้วยตัวอักษร N เพื่อให้แตกต่างจากแรงภายนอกที่แสดงด้วยตัวอักษร P โดยการรวมแรงในแนวดิ่งเราจะได้



รูปที่ 3.7(ก) แท่งวัสดุที่มีแรงภายนอกกระทำ (ข) (ค) และ (ง) แผนภาพรูปอิสระแสดงถึงแรงภายในตามแนวแกน $N_1, N_2,$ และ N_3

$$N_1 = -P_B + P_C + P_D$$
$$N_2 = P_C + P_D$$
$$N_3 = P_D$$

ในการเขียนสมการนี้เรากำหนดให้แรงตามแนวแกนภายในเป็นบวกเมื่อเป็นการดึงและเป็นลบเมื่ออยู่ในสภาวะของการอัด

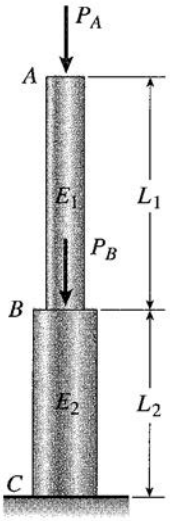
3. หาการเปลี่ยนแปลงของความยาวของแท่งวัสดุแต่ละส่วนจากสมการ (3.3)

$$\delta_1 = \frac{N_1 L_1}{AE}$$
$$\delta_2 = \frac{N_2 L_2}{AE}$$
$$\delta_3 = \frac{N_3 L_3}{AE}$$

$L_1, L_2,$ และ L_3 เป็นความยาวของแท่งวัสดุที่มีขนาดหน้าตัดต่างกัน มีแรงตามแนวแกนที่ต่างกันและเป็นวัสดุต่างชนิดกันดังรูปที่ 3.8 การเปลี่ยนแปลงขนาดของความยาวหาได้จากสมการ

$$\delta = \sum_{i=1}^{n} \frac{N_i L_i}{A_i E_i} \tag{3.4}$$

ซึ่งตัวห้อย i จะเป็นดัชนีของแท่งวัสดุแต่ละส่วน และ n เป็นจำนวนส่วนทั้งหมดของแท่งวัสดุ



รูปที่ 3.8 แท่งวัสดุที่มีแรงตามแนวแกนต่างกัน หน้าตัดต่างกันและวัสดุต่างชนิดกัน

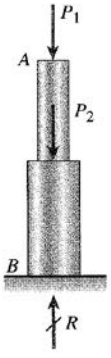
3.5 **โครงสร้างที่หาค่าไม่ได้ทางสถิตศาสตร์** (Statically Indeterminate Structures)

สปริงหรือแท่งวัสดุที่สามารถหาแรงปฏิกิริยาและแรงภายในได้จากแผนภาพรูปอิสระและสมการสมดุล ปัญหาแบบนี้เรียกว่า การหาค่าได้ทางสถิตศาสตร์ (statically determinate) ซึ่งแรงในโครงสร้างที่หาค่าได้ทางสถิตศาสตร์สามารถหาได้โดยที่ไม่ต้องรู้คุณสมบัติของวัสดุ พิจารณาแท่งวัสดุ AB ดังรูปที่ 3.10 การคำนวณหาแรงตามแนวแกนภายในแท่งวัสดุทั้งสองส่วนรวมกันแล้วจะมีค่าเท่ากับแรงปฏิกิริยา R ที่ฐาน ซึ่งจะไม่ขึ้นอยู่กับวัสดุที่ใช้ทำ

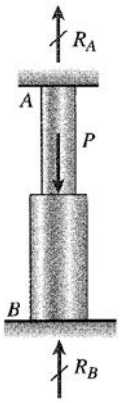
โครงสร้างส่วนใหญ่มีความซับซ้อน การหาแรงปฏิกิริยาและแรงภายในไม่สามารถหาได้จากสมการสถิตศาสตร์เพียงอย่างเดียว พิจารณารูปที่ 3.11 แท่งวัสดุ AB ถูกยึดอยู่ที่ปลายทั้งสองด้าน ซึ่งจะมีแรงปฏิกิริยา R_A และ R_B อยู่ในแนวดิ่ง แต่ใช้ประโยชน์จากสมการสมดุลเพียงอย่างเดียวไม่สามารถหาตัวแปรที่ไม่รู่ค่าได้ สมการผลรวมของแรงในแนวดิ่งจะมีตัวไม่รู้ค่าอยู่สองตัว คือ R_A และ R_B ซึ่งสมการนี้จะหาแรงปฏิกิริยาไม่ได้ (statically indeterminate) โครงสร้างแบบนี้จำเป็นจะต้องมีสมการเพิ่มเติมเกี่ยวกับการเคลื่อนที่ของโครงสร้าง

พิจารณารูปที่ 3.12(ก) แท่งวัสดุที่มีปลายทั้งสองด้านยึดแน่นโดยแรง P กระทำที่จุด C แรงปฏิกิริยา R_A และ R_B ไม่สามารถหาได้จากสมการสมดุลเพียงอย่างเดียว เพราะสมการสมดุลจะได้

$$\sum F_{vert} = 0; \quad R_A + R_B - P = 0 \qquad \text{(ก)}$$



รูปที่ 3.10 แท่งวัสดุหาค่าได้ทางสถิตศาสตร์



รูปที่ 3.11 แท่งวัสดุหาค่าไม่ได้ทางสถิตศาสตร์

สมการเพิ่มเติมได้จากการสังเกตที่ว่าแท่งวัสดุมีปลายยึดแน่นทั้งสองด้าน ดังนั้นจะไม่มีการเปลี่ยนแปลงของความยาว ถ้าเราเขียนแผนภาพอิสระของแท่งวัสดุดังรูปที่ 3.12(ข) แรงสามแรง R_A ,R_B และ P แรงเหล่านี้ทำให้แท่งวัสดุเกิดการเปลี่ยนแปลงของความยาว คือ δ_{AB} แต่ δ_{AB} จะเป็นต้องเท่ากับศูนย์

$$\delta_{AB} = 0 \qquad \text{(ข)}$$

สมการนี้เรียกว่า **สมการเข้ากันได้** (equation of compatibility) ซึ่งเป็นความจริงที่ว่าความยาวจะเปลี่ยนแปลงไม่ได้เมื่อปลายทั้งสองด้านถูกยึดแน่น

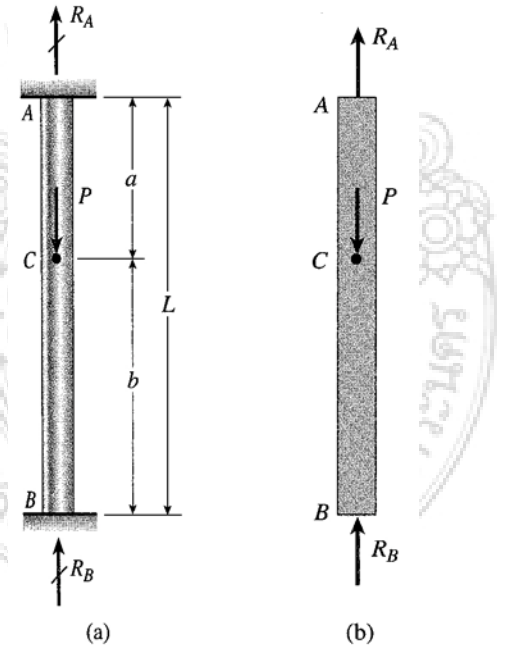
ขั้นตอนต่อไปในการแก้สมการ (ก) และ (ข) เราจำเป็นต้องแสดงสมการเข้ากันได้ในพจน์ของแรงที่ไม่รู้ค่า คือ R_A และ R_B ถ้าวัสดุอยู่ในช่วงยืดหยุ่นเชิงเส้นตรง สมการ $\delta = \dfrac{PL}{AE}$ สามารถใช้หาความสัมพันธ์ของแรงและการกระจัด

สมมุติว่าแท่งวัสดุมีหน้าตัด A และมีค่ามอดุลัส E การเปลี่ยนแปลงความยาวของแท่งวัสดุส่วนบนและส่วนล่างเป็นดังนี้

$$\delta_{AC} = \frac{R_A a}{AE} \qquad \text{(ค)}$$

$$\delta_{BC} = -\frac{R_B b}{AE} \qquad \text{(ง)}$$

เครื่องหมายลบแสดงว่าแท่งวัสดุจะหดสั้นลง เราเริ่มแก้สมการโดยรวมความสัมพันธ์ของแรงและการกระจัดกับสมการเข้ากันได้



รูปที่ 3.12 การวิเคราะห์แท่งวัสดุที่หาค่าไม่ได้ทางสถิตศาสตร์

$$\delta_{AB} = \delta_{AC} + \delta_{CB} = \frac{R_A a}{AE} - \frac{R_B b}{AE} = 0 \qquad \text{(จ)}$$

สมการ (จ) จะมีแรงปฏิกิริยา R_A และ R_B ที่ไม่รู้ค่า

ขั้นตอนต่อไปทำการแก้สมการสมดุล (ก) และ (จ) พร้อม ๆ กัน ผลลัพธ์ที่ได้ คือ

$$R_A = \frac{Pb}{L} \qquad \text{(3.5ก)}$$

$$R_B = \frac{Pa}{L} \tag{3.5ข}$$

เมื่อรู้แรงปฏิกิริยาก็สามารถหาแรงตัวอื่น และความยาวที่เปลี่ยนแปลงได้ สมมุติว่าเราต้องการหาระยะเคลื่อนที่ลง δ_C ของจุด C ระยะเคลื่อนที่ของ AC ก็จะยืดออกเท่ากัน

$$\delta_C = \delta_{AC} = \frac{R_A a}{AE} = \frac{Pab}{AEL} \tag{3.6}$$

ดังนั้นเราสามารถหาความเค้นในส่วนของแท่งวัสดุโดยตรงจากแรงภายในตามแนวแกน

$$\delta_{AC} = \frac{R_A}{A} = \frac{Pb}{AL}$$

3.6 ผลของความร้อน (Thermal Effects)

ภาระภายนอกที่กระทำกับวัสดุไม่ได้ทำให้เกิดความเค้นและความเครียดเท่านั้น แต่ยังมีผลเนื่องจากความร้อนที่ทำให้เกิดความเค้นและความเครียดขึ้น

การเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิทำให้วัสดุเกิดการยืดหรือหดตัว ส่งผลให้เกิดความเค้นเนื่องจากความร้อน (thermal stresses) และความเครียดเนื่องจากความร้อน (thermal strains) ตัวอย่างของการขยายตัวเนื่องจากความร้อนดังรูปที่ 3.16 โดยที่วัสดุไม่ถูกยึดไว้ ซึ่งจะทำให้วัสดุขยายตัวได้อย่างอิสระ เมื่อมีการให้ความร้อนกับก้อนวัสดุ ก้อนวัสดุก็จะเกิดความเครียดขึ้นทุกทิศทุกทาง ถ้าให้จุด A และความยาว AB ของก้อนวัสดุเป็นจุดอ้างอิง จะพบว่าการขยายตัวของก้อนวัสดุจะเป็นไปตามเส้นประ

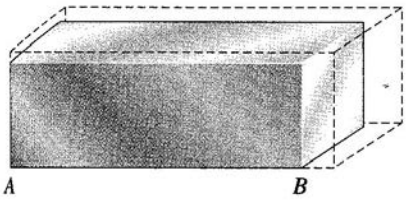
ความเครียดเนื่องจากความร้อน ε_T เป็นสัดส่วนกับอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลง ΔT จะได้

$$\varepsilon_T = \alpha \Delta T \tag{3.10}$$

เมื่อ α คือ คุณสมบัติของวัสดุ เรียกว่า สัมประสิทธิ์การขยายตัวเชิงความร้อน (coefficient of thermal expansion) มีหน่วยเป็นส่วนกลับของอุณหภูมิที่เปลี่ยนแปลง ในระบบ SI ค่า α มีหน่วยเป็น $1/\mathrm{K}$ หรือ $1/^{\circ}\mathrm{C}$ ค่า α จะมีค่าเท่ากันไม่ว่าจะเป็นหน่วย K หรือ $^{\circ}\mathrm{C}$

การตกลงเรื่องเครื่องหมายสำหรับความเครียดจะกำหนดให้การขยายตัวมีค่าเป็นบวกและการหดตัวมีค่าเป็นลบ

การอธิบายความสำคัญของความเครียดเนื่องจากความร้อน เราจะเปรียบเทียบกับความเครียดที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงที่มากระทำ สมมุติว่ามีแรงกระทำกับแท่งวัสดุตามแนวแกน ทำให้วัสดุเกิดความเครียดขึ้น ซึ่งหาได้จาก $\varepsilon = \sigma / E$ เมื่อ σ เป็นความเค้นและ E เป็นค่ามอดุลัสของ ความยืดหยุ่น เราสมมุติว่าแท่งวัสดุนี้เกิดการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิเป็น ΔT ซึ่งหมายความว่าแท่งวัสดุจะเกิดความเครียดขึ้นและหาได้จาก $\varepsilon_T = \alpha \Delta T$ ความเครียดทั้งสองตัวที่เท่ากันทำให้สามารถหาความเค้าที่เกิดขึ้นตามแนวแกนเป็น $\sigma = \alpha E \Delta T$ โดยมีความเครียดเท่ากันที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงของอุณหภูมิ ΔT

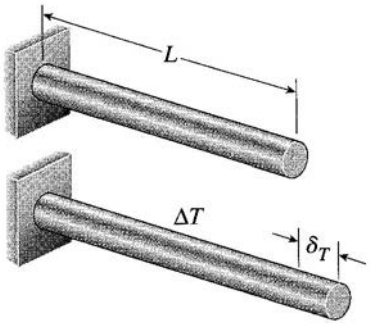


รูปที่ 3.16 แท่งวัสดุที่เกิดการขยายตัวเนื่องจากความร้อน

สมมุติวัสดุดังรูปที่ 3.16 เป็นวัสดุที่มีเนื้อเดียวกันตลอด และอุณหภูมิที่เพิ่มขึ้น ΔT สม่ำเสมอตลอดทั้งก้อนวัสดุ เราสามารถหาขนาดส่วนที่เปลี่ยนแปลงของก้อนวัสดุได้โดยคูณความเครียดเนื่องจากความร้อนกับขนาดเดิมของก้อนวัสดุ ถ้าด้านหนึ่งของก้อนวัสดุมีความยาว L ความยาวส่วนที่เพิ่มขึ้นจะได้

$$\delta_T = \varepsilon_T L = \alpha L \Delta T \tag{3.11}$$

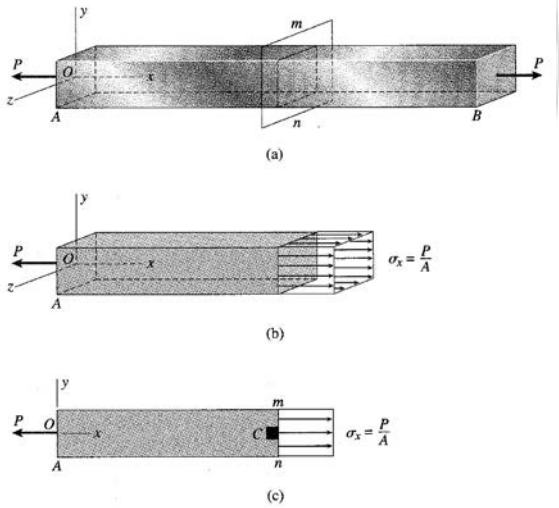
สมการนี้สามารถใช้หาความยาวที่เปลี่ยนแปลงของแท่งวัสดุเมื่อมีการเปลี่ยนแปลงอุณหภูมิอย่างสม่ำเสมอ ดังนั้นส่วนที่ยืด δ_T ของแท่งวัสดุที่มีหน้าตัดเท่ากันตลอดดังรูปที่ 3.17



รูปที่ 3.17 ความยาวส่วนที่เพิ่มขึ้นของแท่งวัสดุที่มีหน้าตัดเท่ากันตลอด
เนื่องจากการเพิ่มของอุณหภูมิอย่างสม่ำเสมอ

เอลิเมนต์ของความเค้น (Stress Element)

การแสดงความเค้นที่กระทำบนเอลิเมนต์เล็ก ๆ ของวัตถุ ซึ่งกำหนดเป็นเอลิเมนต์ C ดังรูปที่ 3.22(ค) ชนิดของเอลิเมนต์นี้เรียกว่า **เอลิเมนต์ของความเค้น** (stress element) ซึ่งจะเป็นรูปลูกบาศก์โดยถือว่ามีขนาดเล็กมาก ๆ แต่เพื่อความกระจ่างเราจะขยายเอลิเมนต์ให้มีขนาดใหญ่ดังรูปที่ 3.23(ก) กำหนดให้ด้านของเอลิเมนต์ขนานกับแกน x y และ z ดังรูปที่ 3.23(ก) เพื่อความสะดวกจะวาดเอลิเมนต์ให้อยู่ในสภาวะสองมิติจะได้ดังรูปที่ 3.23(ข)



รูปที่ 3.22 ชิ้นส่วน AB ที่อยู่ภายใต้แรงดึงแสดงให้เห็นความเค้นที่กระทำบนพื้นที่หน้าตัด mn

(ก) ชิ้นส่วน AB ที่อยู่ภายใต้แรงดึงตามแนวแกน P

(ข) รูปสามมิติของชิ้นส่วน AB ที่ถูกตัดออกเพื่อแสดงการกระจายตัวของความเค้นตั้งฉาก

(ค) การกระจายตัวของความเค้นตั้งฉากรูปสองมิติ

ความเค้นบนส่วนเอียง (Stresses on Inclined Section)

พิจารณาวัตถุที่ถูกตัดด้วยระนาบเอียง pq ดังรูปที่ 3.24(ก) ความเค้นที่เกิดขึ้นบนหน้าตัดเอียงของวัตถุจะกระจายอย่างสม่ำเสมอตลอดพื้นที่หน้าตัดเอียงที่ทำมุม θ กับแกน x ดังรูปที่ 3.24 (ข) ผลรวมของแรง P ที่กระทำบนระนาบ pq ในทิศทาง x ดังรูปที่ 3.24(ข) สามารถแยกออกเป็นสององค์ประกอบคือ แรงตั้งฉาก N ที่ตั้งฉากกับระนาบเอียง pq และแรงเฉือน V ที่สัมผัสกับระนาบเอียง จะได้องค์ประกอบของแรงคือ

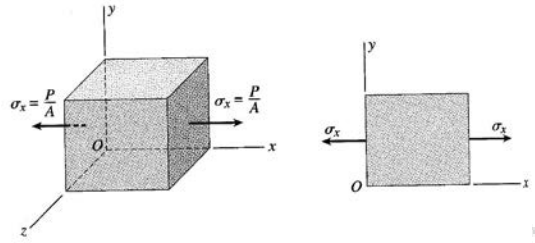
$$N = P\cos\theta \qquad 3.12(ก)$$

$$V = P\sin\theta \qquad 3.12(ข)$$

แรง N และ V ทำให้เกิดความเค้นตั้งฉากและความเค้นเฉือนที่กระจายสม่ำเสมอตลอดพื้นที่หน้าตัดเอียง ดังรูปที่ 3.24(ค) และ (ง) ความเค้นตั้งฉากมีค่าเท่ากับแรงตั้งฉากหารด้วยพื้นที่เอียงและความเค้นเฉือนจะมีค่าเท่ากับแรงเฉือน V หารด้วยพื้นที่เอียง จะได้

$$\sigma = \frac{N}{A_1} \qquad 3.13(ก)$$

$$\tau = \frac{V}{A_1} \qquad 3.13(ข)$$



รูปที่ 3.23 เอลิเมนต์ของความเค้นที่จุด C ที่มีแรงตามแนวแกนกระทำ

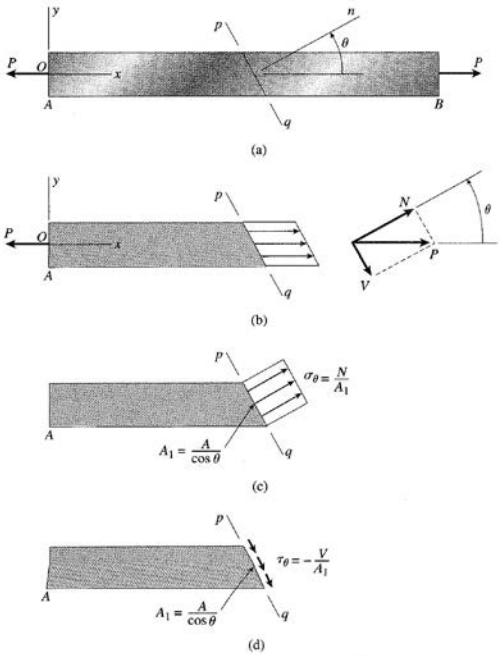
(ก) รูปสามมิติของเอลิเมนต์

(ข) รูปสองมิติของเอลิเมนต์

A_1 คือ พื้นที่ของระนาบเอียง นั้นคือ

$$A_1 = \frac{A}{\cos\theta} \qquad (3.14)$$

การตกลงเรื่องเครื่องหมายของความเค้นที่เกิดขึ้นบนระนาบเอียง ถ้าความเค้นตั้งฉากกับระนาบเอียง σ_θ เป็นบวกเมื่อเป็นความเค้นดึง และความเค้นเฉือน τ_θ เป็นบวกเมื่อทำให้วัตถุเกิดโมเมนต์ทวนเข็มนาฬิกาแสดงดังรูปที่ 3.25



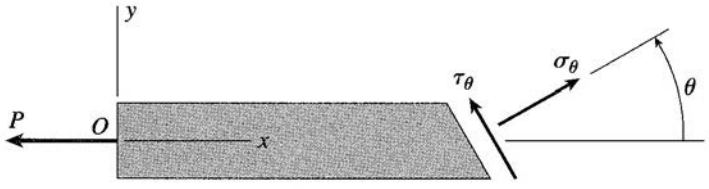
รูปที่ 3.24 แท่งวัสดุที่มีหน้าตัดเท่ากันตลอดอยู่ภายใต้แรงดึง ทำให้เกิดความเค้นบนระนาบเอียง pq

แท่งวัสดุภายใต้แรงดึง แรงตั้งฉาก N ทำให้เกิดความเค้นตั้งฉากเป็นบวก σ_θ (รูปที่ 3.24ค) และแรงเฉือน V ทำให้เกิดความเค้นเฉือนลบ τ_θ ดังรูปที่ 3.24(ง) ความเค้นที่เกิดบนระนาบเอียง

$$\sigma_\theta = \frac{N}{A_1} = \frac{P}{A}\cos^2\theta \qquad 3.15(ก)$$

$$\tau_\theta = -\frac{V}{A_1} = -\frac{P}{A}\sin\theta\cos\theta \qquad 3.15(ข)$$

สมการเหล่านี้จะให้ค่าความเค้นตั้งฉากและความเค้นเฉือนที่กระทำบนระนาบเอียงที่ทำมุม θ ใด ๆ



รูปที่ 3.25 การตกลงเรื่องเครื่องหมายของความเค้นที่เกิดบนระนาบเอียง ความเค้นตั้งฉากเป็นบวกเมื่อเป็นแรงดึง และความเค้นเฉือนเป็นบวกเมื่อมันพยายามทำให้วัตถุหมุนในทิศทางทวนเข็มนาฬิกา

ความเค้นตั้งฉากและความเค้นเฉือนสูงสุด (Maximum Normal and Shear Stresses)

ความเค้นจะแปรเปลี่ยนตามมุมของระนาบเอียงแสดงดังรูปที่ 3.25 โดยมุมที่วัดในทิศทางทวนเข็มนาฬิกากับแกน x จะเป็นบวกและมุมที่วัดในทิศทางตามเข็มนาฬิกาจะมีค่าเป็นลบ มุม θ จะแปรเปลี่ยนจาก -90° ถึง $+90^\circ$

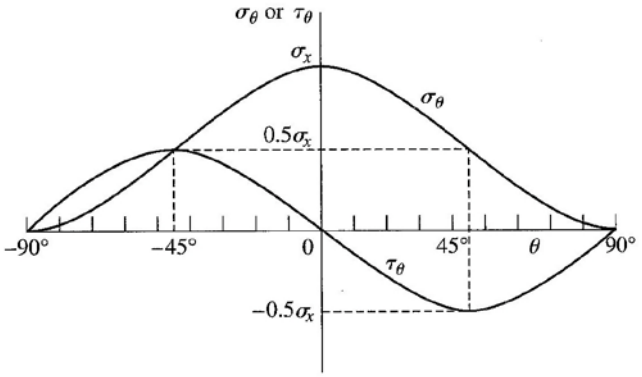
พิจารณากราฟรูปที่ 3.26 ความเค้นตั้งฉาก σ_θ จะมีค่าเท่ากับ σ_x เมื่อมุม $\theta = 0$ แล้วมุม θ ไม่ว่าจะเพิ่มขึ้นหรือลดลง ความเค้นตั้งฉากจะลดลงจนกระทั้ง $\theta = \pm 90^\circ$ ความเค้นจะกลายเป็นศูนย์ เพราะไม่มีความเค้นตั้งฉากบนหน้าตัดที่ขนานกับแกนตามยาว ความเค้นตั้งฉากสูงสุดจะเกิดที่มุม $\theta = 0$

$$\sigma_{\max} = \sigma_x = \frac{P}{A}$$

ความเค้นเฉือน τ จะเป็นศูนย์เมื่อ $\theta = 0^\circ$ และ $\theta = 90^\circ$ ความเค้นเฉือนจะมากที่สุดเมื่อ $\theta = 45^\circ$

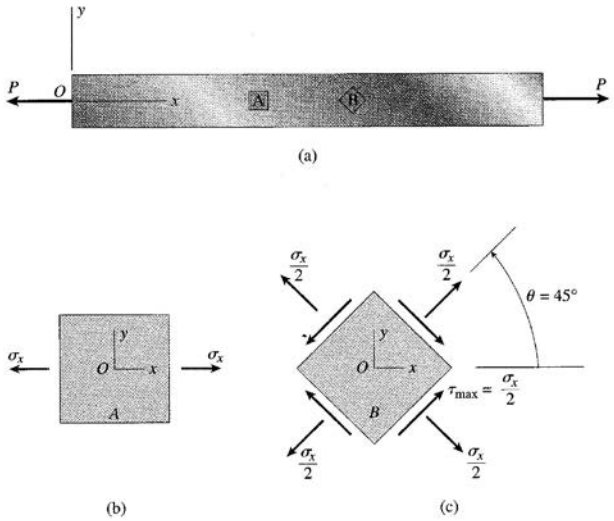
$$\tau_{\max} = \frac{P}{A}\sin 45^\circ \cos 45^\circ = \frac{P}{2A} = \frac{\sigma_{\max}}{2}$$

เอลิเมนต์ของความเค้นสองตัวที่อยู่บนแท่งวัสดุที่ได้รับแรงดึง P ดังรูปที่ 3.27 เอลิเมนต์ A เอียงทำมุม $\theta = 0^\circ$ และเอลิเมนต์ B เอียงทำมุม $\theta = 45^\circ$ เอลิเมนต์ A จะเกิดความเค้นตั้งฉากสูงสุดเท่านั้นดังรูปที่ 3.27(ข) และเอลิเมนต์ B จะเกิดความเค้นเฉือนสูงสุดดังรูปที่ 3.27(ค) เอลิเมนต์ A จะเกิดความเค้นตั้งฉากสูงสุดเพียงอย่างเดียวเท่านั้น



รูปที่ 3.26 กราฟแสดงความเค้นตั้งฉาก σ_θ และความเค้นเฉือน τ_θ เทียบกับมุม θ

เอลิเมนต์ (รูปที่ 3.27ค) จะเกิดทั้งความเค้นตั้งฉากและความเค้นเฉือน โดยความเค้นเฉือนจะมีขนาดเป็นครึ่งหนึ่งของความเค้นตั้งฉากสูงสุด คือ $\sigma_x / 2$ ถ้าพิจารณาผิวหน้าของเอลิเมนต์ที่เอียงทำมุม $\theta = 45^\circ$ ความเค้นตั้งฉากกับผิวหน้านี้จะเป็นความเค้นดึงจึงมีค่าเป็นบวก ส่วนความเค้นเฉือนที่เกิดจะทำให้เอลิเมนต์หมุนตามเข็มนาฬิกาจึงมีค่าเป็นลบ ความเค้นที่เกิดบนผิวหน้าอื่นที่เหลือก็หาได้ในทำนองเดียวกัน



รูปที่ 3.27 ความเค้นตั้งฉากและความเค้นเฉือนที่กระทำกับเอลิเมนต์ของความเค้นที่เอียงทำมุม $\theta = 0^\circ$ และ $\theta = 45^\circ$ ของแท่งวัสดุที่รับแรงดึง

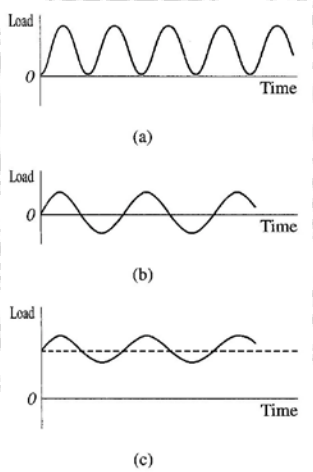
ถ้าแท่งวัสดุได้รับแรงอัด ความเค้นเฉือนสูงสุดที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงในแนวแกนจะมีค่าเป็นครึ่งหนึ่งของความเค้นตั้งฉากสูงสุด ความเค้นเฉือนอาจจะทำให้วัสดุเกิดความเสียหาย ถ้าวัสดุนั้นทนความเค้นเฉือนได้น้อยกว่าความเค้นอัด ตัวอย่างเช่น แท่งไม้เกิดความเสียหายที่ระนาบเอียงทำมุม 45° เนื่องจากความเค้นเฉือนสูงสุดดังรูปที่ 3.28

รูปที่ 3.28 ความเสียหายที่เกิดจากความเค้นเฉือนตามแนวระนาบ 45° ของแท่งไม้เมื่อได้รับแรงอัด

3.8 ภาระที่กระทำซ้ำ ๆ และความล้า (Repeated Loading and Fatigue)

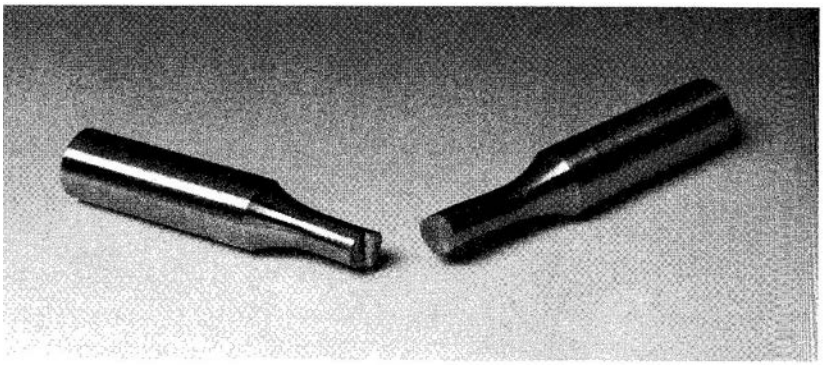
พฤติกรรมของโครงสร้างไม่ได้ขึ้นอยู่กับธรรมชาติของวัสดุ แต่ยังขึ้นอยู่ลักษณะของภาระที่มากระทำ เช่น แรงกระทำที่อยู่กับที่หรือแรงกระทำที่เคลื่อนที่หรือ แรงที่กระทำซ้ำ ๆ เป็นเวลานาน

ภาระที่กระทำซ้ำ (repeated load) ดังรูปที่ 3.30 กราฟรูป (ก) แสดงภาระกระทำแล้วเอาภาระออกและกระทำใหม่อีกในทิศทางเดิม กราฟรูป (ข) แสดงภาระที่กระทำสลับไปมาและมีทิศทางย้อนกลับ (reverse direction) ในระหว่างรอบของภาระที่กระทำ กราฟรูป (ค) แสดงภาระที่เกิดการเปลี่ยนแปลงรอบค่าเฉลี่ย ภาระที่กระทำซ้ำ ๆ จะเกิดกับเครื่องจักรกล เครื่องยนต์ เทอร์ไบน์ ชิ้นส่วนของเครื่องบิน ชิ้นส่วนของรถยนต์ และอื่น ๆ ซึ่งโครงสร้างเหล่านี้จะรับภาระที่กระทำเป็นล้าน ๆ รอบ

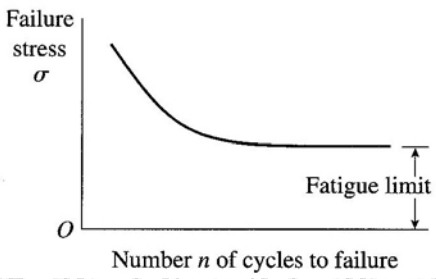


รูปที่ 3.30 ชนิดของภาระที่กระทำซ้ำ
(ก) ภาระที่กระทำในทิศทางเดียวเท่านั้น
(ข) ภาระที่กระทำสลับไปสลับมา
(ค) ภาระที่เป็นตัวเสริมทำให้มีค่าสูงกว่าค่าเฉลี่ย

โครงสร้างที่ถูกกระทำด้วยภาระที่เคลื่อนที่ได้ (dynamics) อาจทำให้เกิดความเสียหายได้ ถึงแม้ว่าโครงสร้างจะมีภาระกระทำที่ความเค้นต่ำกว่า – ภาระตัวเดียวกันที่มีภาระกระทำแบบสถิต จากภาระที่กระทำซ้ำ ๆ กันเป็นจำนวนหลายล้านรอบ จึงทำให้เกิดความเสียหายขึ้นเนื่องจากเกิดความล้า (fatigue) ตัวอย่างเช่นตัวหนีบกระดาษโลหะ ถ้าทำการดัดลวดหนีบกระดาษไปมาซ้ำๆ กันหลายๆ ครั้งจะทำให้ลวดหนีบกระดาษหักออก แต่ถ้าดัดลวดหนีบกระดาษไปทิศทางเดียวจะไม่เกิดการแตกหัก ความล้าอาจกำหนดได้เป็นความเสียหายของวัสดุภายใต้ความเค้นและความเครียดที่เกิดขึ้นซ้ำ ๆ กันส่งผลให้เกิดการแตกหัก



รูปที่ 3.31 ความเสียหายเนื่องจากความล้า เนื่องจากแรงกระทำซ้ำๆ ด้วยแรงดึง จะเกิดรอยแตกขึ้นและแพร่ขยายออกตลอดหน้าตัดจนทำให้เกิดการแตกหัก

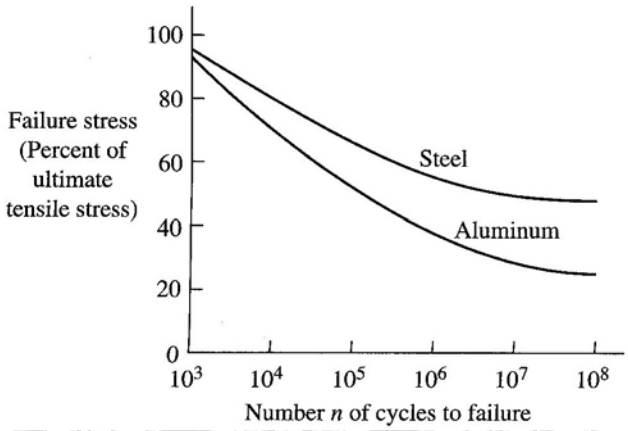


รูปที่ 3.32 เส้นกราฟความทนทานหรือแผนภาพ $S-N$ ที่แสดงข้อจำกัดของความล้า

ความเสียหายเนื่องจากความล้าจะเกิดรอยแตกตรงจุดที่มีความเค้นสูง และเกิดการขยายใหญ่ขึ้น เนื่องจากแรงที่มากระทำซ้ำ ๆ เมื่อรอยแตกมีขนาดใหญ่จนวัสดุไม่สามารถจะต้านทานแรงที่มากระทำได้การแตกหักของวัสดุก็จะเกิดขึ้นอย่างทันทีทันใด ดังรูปที่ 3.32 การแตกหักอาจจะเกิดขึ้นเมื่อใดก็ได้จากรอบการทำงานนับล้าน ๆ รอบจนกระทั่งทำให้เกิดความเสียหายจากความล้า

ขนาดของแรงที่ทำให้เกิดความเสียหายเนื่องจากความล้าจะมีค่าน้อยกว่า แรงที่หาได้ทางสถิต การหาแรงที่ทำให้เกิดความเสียหายโดยการทดสอบวัสดุด้วยความเค้นต่าง ๆ และนับจำนวนรอบที่ทำให้เกิดความเสียหาย ตัวอย่างเช่น นำชิ้นทดสอบของวัสดุไปติดตั้งกับเครื่องทดสอบความล้า และให้แรงกระทำซ้ำๆ เพื่อให้เกิดความเค้นที่แน่นอน คือ σ_1 และนับจำนวนรอบที่แรงกระทำจนเกิดความเสียหาย การทดสอบนี้จะซ้ำกับการหาค่าความเค้นแตกต่าง σ_2 ถ้า σ_2 มากกว่า จำนวนรอบที่ทำให้เกิดความเสียหายจะน้อยกว่า σ_1 ถ้า σ_2 น้อยกว่า σ_1 จำนวนรอบที่ทำให้เกิดความเสียหายจะมากกว่า แล้วนำข้อมูลที่ได้ไปวาดเส้นโค้งความทนทาน (endurance curve) หรือ แผนภาพ $S-N$ ซึ่งความเค้นที่ทำให้เกิดความเสียหาย (S) จะเทียบกับจำนวนรอบ (N) ที่ทำให้เกิดความเสียหาย (รูปที่ 3.32) แกนตั้งมักจะเป็นสเกลเชิงเส้น ส่วนแกนนอนมักจะเป็นสเกลล็อก

เส้นกราฟความทนทานดังรูปที่ 3.32 จะแสดงค่าความเค้นที่น้อยกว่าจะได้จำนวนรอบในการทำงานมากกว่าความเค้นสูง และที่ความเค้นสูงยังทำให้เกิดความเสียหายได้เร็ว วัสดุบางชนิดจะมีเส้นกราฟจะมีเส้นกำกับในแนวนอนที่เรียกว่า **ขีดจำกัดความล้า** (fatigue limit) หรือ **ขีดจำกัดความทนทาน** (endurance limit) เมื่อวัสดุถูกแรงกระทำจนทำให้เกิดความเค้นที่ต่ำกว่าขีดจำกัดความทนทาน จะทำให้ไม่เกิดความเสียหายเนื่องจากความล้าไม่ว่าจำนวนรอบที่กระทำจะเป็นเท่าไร เส้นกราฟความทนทานจะขึ้นอยู่กับเนื้อวัสดุ รูปทรง ความเร็วในการทดสอบ รูปแบบของแรงที่มากระทำ



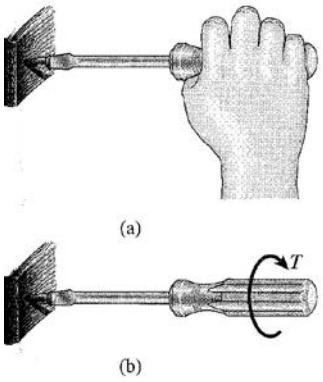
รูปที่ 3.33 เส้นกราฟความทนทานของเหล็กกล้าและอะลูมิเนียม

แผนภาพ $S-N$ สำหรับเหล็กกล้าและอะลูมิเนียมแสดงดังรูปที่ 3.33 โดยมีแกนตั้งเป็นความเค้นสูงสุดที่ทำให้เกิดความเสียหายแสดงเป็นเปอร์เซ็นต์ ส่วนแกนนอนเป็นจำนวนรอบที่ทำให้เกิดความเสียหาย เส้นกราฟของเหล็กกล้าจะอยู่ในแนวนอนที่รอบประมาณ 10^7 รอบ และขีดจำกัดความล้าจะมีค่าประมาณ $50\,\%$ ของค่าความเค้นดึงสูงสุดสำหรับแรงสถิต ขีดจำกัดความล้าสำหรับอะลูมิเนียมไม่แน่นอนเหมือนเหล็กกล้า แต่ขีดจำกัดความล้าอยู่ที่ประมาณ 5×10^8 รอบ หรือ ประมาณ $25\,\%$ ของความเค้นสูงสุด

การบิด
(TORSION)

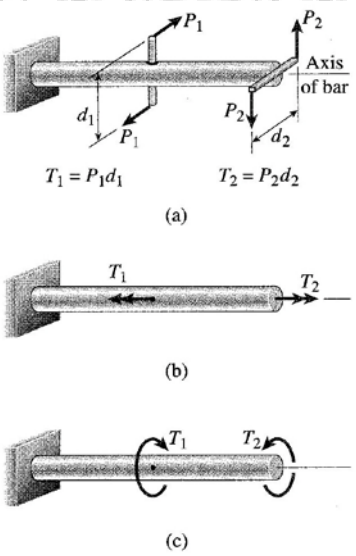
4.1 บทนำ

ในบทนี้เราจะพิจารณาเรื่องการบิด การบิดของแท่งวัสดุเกิดจากแรงที่มากระทำกับแท่งวัสดุตรงแล้วพยายามให้แท่งวัสดุตรงนี้เกิดการหมุนรอบแนวแกนของแท่งวัสดุเอง ตัวอย่างเช่น เมื่อหมุนไขควงมือของเราจะออกแรงบิดด้ามไขควง ดังรูปที่ 4.1



รูปที่ 4.1 การบิดด้ามไขควงเนื่องจากแรงบิด T ที่กระทำที่ด้ามไขควง

แท่งวัสดุตรงที่มีแรงคู่หนึ่งกระทำตรงจุดกึ่งกลางและแรงอีกคู่หนึ่งกระทำที่ปลาย ดังรูปที่ 4.2 แรงคู่แรกจะทำให้เกิดโมเมนต์ $T_1 = P_1 d_1$ และแรงคู่ที่สองจะทำให้เกิดโมเมนต์ $T_2 = P_2 d_2$ ซึ่งโมเมนต์ทั้งสองตัวจะทำให้แท่งวัสดุหมุนรอบแกนของมันเอง หน่วยของโมเมนต์ในระบบ USCS เป็น ฟุต-ปอนด์ $(\mathrm{lb}\cdot\mathrm{ft})$ และหน่วย SI เป็นนิวตัน-เมตร $(\mathrm{N}\cdot\mathrm{m})$ เราจะแสดงโมเมนต์ของแรงคู่ควบในรูปของเวกเตอร์ด้วยสัญลักษณ์ลูกศรที่มีสองหัว (รูปที่ 4.2ข) ลูกศรนี้จะตั้งฉากกับระนาบของแรงคู่ควบแต่จะขนานกับแกนของแท่งวัสดุ ทิศทางของลูกศรหาได้จากกฎมือขวาโดยให้นิ้วทั้งสี่กำตามทิศทางการหมุนของโมเมนต์แล้วนิ้วหัวแม่มือจะแสดงทิศทางของเวกเตอร์โมเมนต์ หรืออาจแสดงในรูปลูกศรโค้ง โดยให้ทิศทางของลูกศรโค้งไปทางเดียวกับทิศทางการหมุน (ดังรูปที่ 4.2ค)

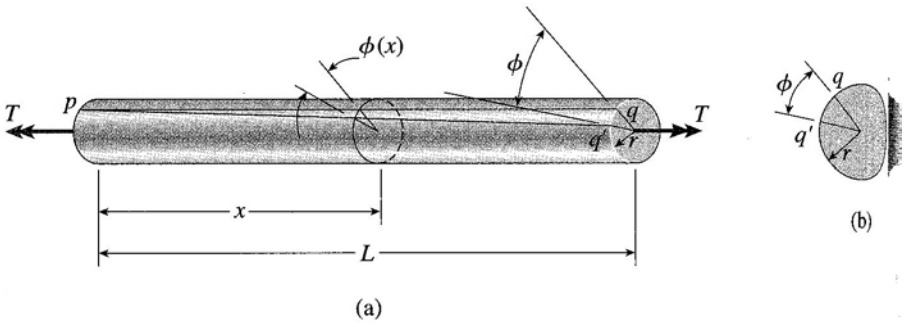


รูปที่ 4.2 แท่งวัสดุที่อยู่ภายใต้โมเมนต์บิด T_1 และ T_2

4.2 **การเปลี่ยนรูปเนื่องจากการบิดของแท่งวัสดุกลม** (Torsional Deformations of a Circular)

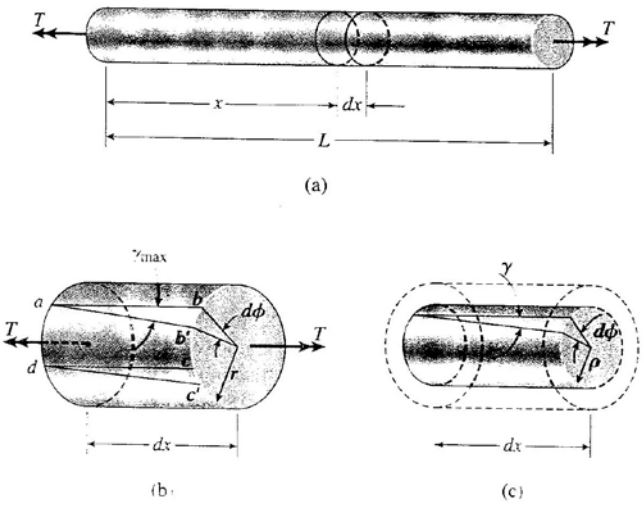
แท่งวัสดุกลมเกิดการบิดเนื่องจากแรงบิด T ที่ปลายแต่ละด้าน(ดังรูปที่ 4.3) เรียกวัสดุที่อยู่ภายใต้แรงนี้ว่า **การบิดอย่างเดียว** (pure torsion) โดยที่หน้าตัดของวัสดุที่ตำแหน่งใด ๆ จะเกิดแรงบิดภายในเท่ากัน และหน้าตัดของแท่งวัสดุยังคงเป็นระนาบ

การเปลี่ยนรูปของแท่งวัสดุอาจจินตนาการว่า ปลายด้านซ้ายของแท่งวัสดุถูกยึดแล้วมีแรงบิด T กระทำที่ปลายด้านขวา ซึ่งจะทำให้ปลายด้านขวาเกิดการหมุนเมื่อเทียบกับปลายด้านซ้ายและเกิด



รูปที่ 4.3 การเปลี่ยนรูปของแท่งวัสดุกลมภายใต้แรงบิดอย่างเดียว

การหมุนเป็นมุมเล็ก ๆ ϕ ขึ้น เรียกว่า **มุมบิด** (angle of twist) เส้นตรง pq ตามแนวยาวของแท่งวัสดุจะเอียงเป็น pq' เมื่อ q' เป็นตำแหน่งของจุด q ที่เปลี่ยนไปหลังผ่านการหมุน มุมบิดจะเป็นไปตามความยาวของแท่งวัสดุ ที่ช่วงกลางมุมบิด $\phi(x)$ จะมีค่าอยู่ระหว่างศูนย์ที่ปลายด้านซ้ายและ ϕ ที่ปลายด้านขวา แรงบิดนี้จะเท่ากันตลอด มุมบิด $\phi(x)$ จะแปรเปลี่ยนตามความยาวของแท่งวัสดุ



รูปที่ 4.4 การเปลี่ยนแปลงของเอลิเมนต์ที่มีความยาว dx

แท่งวัสดุยาว L ถ้าตัดแท่งวัสดุยาว dx เพื่อนำมาพิจารณา ผิวภายนอกของเอลิเมนต์ $abcd$ โดยมีด้าน ab และ cd ขนานกับแนวแกน การบิดของแท่งวัสดุทางผิวหน้าด้านขวาเทียบกับผิวด้านซ้ายจะเกิดมุมบิดเล็ก ๆ

$d\phi$ ซึ่งจุด b จะเคลื่อนไปเป็นจุด b' และจุด c จะเคลื่อนไปเป็นจุด c' ความยาวด้านข้างของเอลิเมนต์จะเป็น $ab'c'd$ เอลิเมนต์จะอยู่ภายใต้สภาวะความเค้นเฉือนอย่างเดียว (pure shear) และขนาดความเค้นเฉือน γ_{max} (รูปที่ 4.4ข) จะเท่ากับมุมที่ลดลงของ bad

$$\gamma_{max} = \frac{bb'}{ab}$$

เมื่อ γ_{max} วัดเป็นเรเดียน bb' เป็นระยะที่จุด b เคลื่อนที่ไป และ ab คือความยาวของ เอลิเมนต์เท่ากับ dx ระยะ bb' จะเท่ากับ $rd\phi$ ดังนั้น

$$\gamma_{\max} = \frac{rd\phi}{dx} \qquad \text{(ก)}$$

สมการนี้จะเป็นความเค้นเฉือนที่ผิวนอกของแท่งวัสดุเมื่อเกิดมุมบิด ปริมาณ $\frac{d\phi}{dx}$ เป็นอัตราการเปลี่ยนแปลงของมุมบิดเทียบกับความยาวของแท่งวัสดุ โดยใช้สัญลักษณ์ θ จะเป็นมุมบิดต่อหน่วยความยาว (angle of twist per unit length) หรืออัตราการบิด (rate of twist)

$$\theta = \frac{d\phi}{dx} \qquad (4.1)$$

เราสามารถเขียนสมการความเค้นเฉือนที่ผิวนอกได้ดังนี้

$$\gamma_{\max} = \frac{rd\phi}{dx} = r\theta \qquad (4.2)$$

ในกรณีการบิดอย่างเดียวอัตราการบิดจะคงตัวและมีค่าเท่ากับมุมบิดรวม ϕ ถ้าหารด้วย ความยาว L ของแท่งวัสดุ นั้นคือ $\theta = \phi / L$ จะได้

$$\gamma_{\max} = r\theta = \frac{r\phi}{L} \qquad (4.3)$$

ความเครียดเฉือนที่อยู่ภายในแท่งวัสดุสามารถหาได้ด้วยวิธีเดียวกับ γ_{max} ที่ผิว เพราะรัศมีของหน้าตัดยังคงเป็นเส้นตรงและไม่เปลี่ยนรูปร่างเมื่อเกิดการบิด เอลิเมนต์ $abcd$ ที่ผิวนอก (รูปที่ 4.4ข) จะเหมือนกับเอลิเมนต์ที่อยู่ด้านในของแท่งวัสดุที่มีรัศมี ρ (รูปที่ 4.4ค) ดังนั้นที่ผิวด้านในที่อยู่ภายใต้ความเค้นเฉือนอย่างเดียว จะเป็น

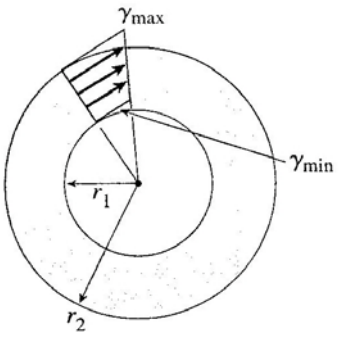
$$\gamma = \rho\theta = \frac{\rho}{r}\gamma_{max} \qquad (4\text{-}4)$$

สมการนี้แสดงให้เห็นความเครียดเฉือนในแท่งวัสดุกลมจะแปรเปลี่ยนเป็นลักษณะเส้นตรงขึ้นกับรัศมีจากจุดศูนย์กลาง ความเครียดจะเป็นศูนย์ที่จุดศูนย์กลางและจะเพิ่มขึ้นจนมีค่ามากที่สุดที่ผิวนอก

รูปที่ 4.5 แสดงการเปลี่ยนแปลงของความเครียดจากน้อยที่สุดที่ผิวด้านในและมากที่สุดที่ผิวด้านนอก ซึ่งจะได้ความสัมพันธ์ ดังนี้

$$\gamma_{min} = \frac{r_1}{r_2}\gamma_{max} \qquad (4.5)$$

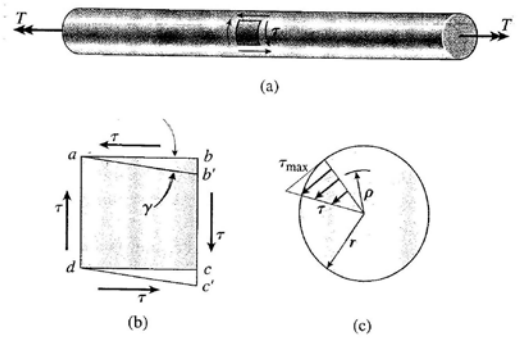
เมื่อ r_1 และ r_2 เป็นรัศมีภายในและรัศมีภายนอกของแท่งวัสดุกลวง



รูปที่ 4.5 **การเปลี่ยนแปลงของแท่งวัสดุกลวง**

4.3 เพลากลมที่ทำจากวัสดุยืดหยุ่นเชิงเส้นตรง (Circular Bars of Linearly Elastic Materials)

การหาขนาดและทิศทางของความเค้นเฉือน ดังรูปที่ 4.6(ก) สังเกตแรงบิด T ที่กระทำที่ปลายด้านขวาซึ่งมีทิศทางทวนเข็มนาฬิกา เมื่อมองจากปลายด้านขวา ดังนั้นความเค้นเฉือน τ จะมีทิศทางดังรูป



รูปที่ 4.6 ความเค้นเฉือนในเพลากลมเนื่องจากแรงบิด

ถ้าวัสดุอยู่ในช่วงความยืดหยุ่นเชิงเส้นตรง เราสามารถใช้กฎของฮุกที่เกี่ยวกับความเค้นเฉือนได้ว่า

$$\tau = G\gamma \tag{4.6}$$

เมื่อ G คือ มอดุลัสของความแข็งเกร็ง และ γ คือ มุมบิดมีหน่วยเป็นเรเดียน เราจะได้

$$\tau_{max} = Gr\theta \tag{4.7ก}$$

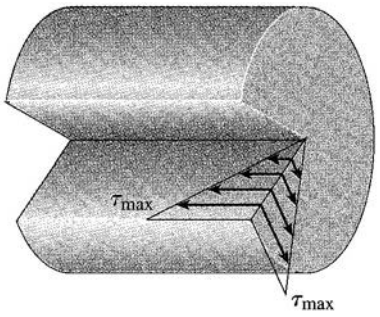
$$\tau = G\rho\theta = \frac{\rho}{r}\tau_{max} \tag{4.7ข}$$

τ_{max} จะเกิดที่ผิวนอกสุดของเพลาที่รัศมี r

τ จะเป็นค่าความเค้นเฉือนใด ๆ ที่มีรัศมี ρ ใด ๆ

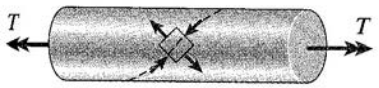
θ จะเป็นมุมบิดของเพลา

เมื่อมีความเค้นเฉือนที่ระนาบหน้าตัดใด ๆ ก็จะเกิดความเค้นเฉือนที่มีขนาดเท่ากันกระทำในระนาบตามความยาวเพลา (รูปที่ 4.7) สรุปได้ว่าจะเกิดความเค้นเฉือนในแนวแกนที่มีขนาดเท่ากัน



รูปที่ 4.7 ความเค้นเฉือนตามแนวแกนและความเค้นเฉือนตามแนวขวางของเพลากลม

กระทำในทิศทางตั้งฉากกับระนาบหน้าตัดด้วย ถ้าวัสดุที่ใช้ทำเพลาทนค่าความเค้นเฉือนตามแนวแกนได้น้อยกว่าความเค้นเฉือนบนระนาบหน้าตัด ดังเช่น ไม้จะมีแนวลายไม้ขนานกับแนวแกน ถ้าเพลาวัสดุเกิดความเสียหายเนื่องจากแรงบิดจะเกิดรอยแตกที่ผิวของเพลาในทิศทางตามความยาว



รูปที่ 4.8 ความเค้นและความอัดที่กระทำกับเอลิเมนต์
ของผิวเพลาที่เอียงทำมุม 45° กับแนวแกน

สภาวะความเค้นเฉือนอย่างเดียวที่ผิวของเพลา (รูปที่ 4.6ข) เปรียบเหมือนมีความเค้นดึงและความเค้นอัดกระทำกับเอลิเมนต์เอียงทำมุม 45 องศา กับแนวแกนดังรูปที่ 4.8 ถ้าวัสดุที่ใช้ทำเพลามีค่าน้อยกว่าความเค้นดึงหรือความเค้นอัดที่เกิดจากการบิด ความเสียหายจะเกิดกับเพลาตามแนวดึงที่เอียงทำมุม 45 องศา กับแนวแกน ซึ่งสามารถอธิบายได้โดยการบิดซอล์ค

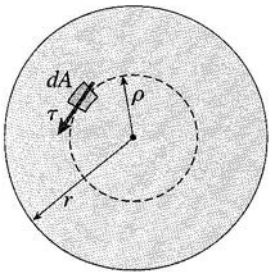
สูตรในการหาแรงบิด (The Torsion Formula)

พิจารณาการกระจายของความเค้นเฉือนที่กระทำลงบนพื้นที่หน้าตัดดังรูปที่ 4.6(ค) และรูปที่ 4.7 เนื่องจากความเค้นเฉือนกระทำรอบพื้นที่หน้าตัดนี้อย่างต่อเนื่องตลอดหน้าตัด ผลทำให้เพลาเกิดโมเมนต์ที่มีขนาดเท่ากับแรงบิด T ที่กระทำบนเพลา การหาผลลัพธ์ของแรงบิด T โดยพิจารณาพื้นที่เล็ก ๆ dA ที่อยู่ห่างจากจุดศูนย์กลางการหมุนเป็นระยะ ρ แรงเฉือนที่กระทำบนเอลิเมนต์นี้เท่ากับ τdA เมื่อ τ เป็นความเค้นเฉือนที่รัศมี ρ โมเมนต์ของแรงเหล่านี้รอบแกนของแท่งวัสดุเท่ากับแรงคูณด้วยระยะจากจุดศูนย์กลางหรือ $\tau\rho dA$ แทนค่าความเค้นเฉือน τ จากสมการ (4.7ข) จะได้สมการของโมเมนต์ของเอลิเมนต์เป็น

$$dM = \tau\rho dA = \frac{\tau_{max}}{r}\rho^2 dA$$

โมเมนต์ลัพธ์ที่ได้ (จะเท่ากับแรงบิด T) คือ ผลรวมตลอดบนพื้นที่หน้าตัดของโมเมนต์ทั้งหมด

$$T = \int_A dM = \frac{\tau_{\max}}{r} \int_A \rho^2 dA = \frac{\tau_{\max}}{r} J \tag{4.8}$$



รูปที่ 4.9 การหาผลลัพธ์ของความเค้นเฉือนที่กระทำบนพื้นที่หน้าตัด

ซึ่ง

$$J = \int_A \rho^2 dA \tag{4.9}$$

J คือโมเมนต์ความเฉื่อยเชิงขั้ว (polar moment of inertia) ของหน้าตัดวงกลม สำหรับวงกลมที่มีรัศมี r และเส้นผ่าศูนย์กลาง d โมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่คือ

$$J = \frac{\pi r^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32} \tag{4.10}$$

ความเค้นเฉือนสูงสุดสามารถหาได้จากสมการ (4.8)

$$\tau_{\max} = \frac{Tr}{J} \tag{4.11}$$

สมการนี้คือ **สูตรของแรงบิด** (torsion formula) แสดงให้เห็นความเค้นเฉือนจะขึ้นอยู่กับแรงบิด T และเป็นอัตราส่วนกลับกับโมเมนต์ความเฉื่อยเชิงขั้ว J

หน่วยของแรงบิด T ในระบบ SI เป็นนิวตัน-เมตร $(\mathrm{N \cdot m})$ รัศมี r เป็น เมตร (m) โมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่หน้าตัด J เมตร^4 (m)^4 และความเค้นเฉือน τ เป็นนิวตันต่อตารางเมตร (N/m^2)

แทนค่า $r = d \ / \ 2$ และ $J = \pi d^4 / 32$ ลงในสมการ (4.11) จะได้

$$\tau_{max} = \frac{16T}{\pi d^3} \tag{4.12}$$

สมการ (4.12) ใช้กับเพลากลมตัน ขณะที่สมการ (4.11) ใช้ได้ทั้งเพลากลมตันและเพลากลมกลวง ความเค้นเฉือนที่รัศมีใด ๆ ρ ของเพลาจากจุดกึ่งกลางเพลา คือ

$$\tau = \frac{\rho}{r}\tau_{\max} = \frac{T\rho}{J} \tag{4.13}$$

เราจะเห็นว่าความเค้นเฉือนจะแปรเปลี่ยนอย่างเป็นเส้นตรงด้วยระยะห่างจากจุดศูนย์กลางเพลา

มุมบิด (Angle of Twist)

มุมบิดของเพลาจะแปรเปลี่ยนอย่างเป็นเส้นตรงในช่วงยืดหยุ่น โดยสัมพันธ์กับแรงบิด T ที่มากระทำ จากสมการ (4.7ก) กับสมการ (4.11) จะได้

$$\theta = \frac{T}{JG} \tag{4.14}$$

มุมบิด θ จะขึ้นอยู่กับแรงบิด T โดยตรงและเป็นส่วนกลับของ JG ผลคูณ JG เรียกว่า torsional rigidity สำหรับเพลาที่อยู่ภายใต้แรงบิดเพียงอย่างเดิม มุมบิดรวม ϕ จะเท่ากับอัตราการบิดคูณด้วยความยาวของเพลา ($\phi = \theta L$)

$$\phi = \frac{TL}{JG} \tag{4.15}$$

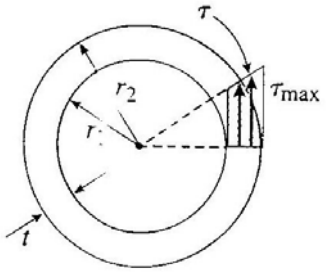
เมื่อ ϕ วัดเป็นเรเดียน ปริมาณ JG/L เรียกว่า torsional stiffness ของแท่งวัสดุคือแรงบิดที่ต้องการเพื่อให้เกิดมุมในการหมุนมีค่าหนึ่ง ส่วน torsional flexibility คือ ส่วนกลับของ stiffness หรือ L/JG กำหนดเป็นมุมของการหมุนที่ทำให้เกิดแรงบิดหนึ่งหน่วย ดังนั้นจะได้ว่า

$$k_T = \frac{JG}{L} \tag{4.16ก}$$

$$f_T = \frac{L}{JG} \tag{4.16ข}$$

ท่อกลม (Circular Tubes)

เพลากลมกลวงจะมีประสิทธิภาพในการต้านทานต่อแรงบิดได้ดีกว่า เรารู้ว่าความเค้นเฉือนในเพลาตันจะมีค่ามากที่สุดที่ผิวด้านนอกของเพลา และจะมีค่าน้อยที่สุดที่จุดกึ่งกลางเพลา ในเพลากลมตันความเค้นที่ใกล้จุดศูนย์กลางจะมีรัศมีหมุนน้อย (ρ) ในเพลากลมกลวงเนื้อวัสดุส่วนใหญ่จะอยู่ใกล้ผิวรัศมีนอกของหน้าตัด ทั้งความเค้นเฉือนและแขนหมุนจะมีค่ามากที่สุด (รูปที่ 4.10) ดังนั้นน้ำหนักของกเพลาจะลดลง ซึ่งเป็นการประหยัดเนื้อวัสดุ จึงเป็นที่นิยม มีใช้กับเพลาขับขนาดใหญ่ เพลาของเครื่องกำเนิดกระแสไฟฟ้า



รูปที่ 4.10 ท่อกลมที่ได้รับแรงบิด

ความสัมพันธ์ระหว่างแรงบิด T และความเค้นเฉือนสูงสุดยังคงถูกกำหนดด้วยสมการ (4.8) แต่โมเมนต์ความเฉื่อยเชิงขั้ว J สำหรับเพลากลมกลวงที่มีรัศมีภายใน $\rho = r_1$ และรัศมีภายนอก $\rho = r_2$ จะได้

$$J = \frac{\pi r t}{2}\left(4r^2 + t^2\right) = \frac{\pi d t}{4}\left(d^2 + t^2\right) \tag{4.17}$$

ความหนา t ของท่อน้อยมากเมื่อเทียบกับรัศมีสามารถใช้สมการโดยประมาณได้ โมเมนต์ความเฉื่อยเชิงขั้วจะเป็น

$$J \approx 2\pi r^3 t = \frac{\pi d^3 t}{4} \tag{4.18}$$

ซึ่ง r และ d จะเป็นค่าเฉลี่ย

4.4 การบิดของเพลาที่มีหน้าตัดไม่สม่ำเสมอ (Nonuniform Torsion)

เพลาที่มีหน้าตัดไม่สม่ำเสมอเมื่อมีแรงบิดมากระทำตรงจุดใดตามแนวแกนของเพลาสามารถวิเคราะห์ได้โดยใช้สูตรการบิดของเพลา โดยพิจารณาในแต่ละส่วนของเพลาที่มีแรงบิดมากระทำแล้วจึงนำมารวมกัน เราจะพิจารณาในสามกรณี ส่วนวิธีอื่น ๆ สามารถยึดถือโดยใช้เทคนิคที่คล้ายกันกับที่อธิบายในที่นี้

กรณีที่ 1 เพลาที่มีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางต่างกันและมีแรงบิดขนาดคงตัวมากระทำในแต่ละส่วนของเพลา (รูปที่ 4.14) เพลาดังรูปมีขนาดเส้นผ่าศูนย์กลางต่างกันสองขนาดแล้วมีแรงบิดมากระทำที่จุด A B C และ D เราจะตัดเพลาออกเป็นส่วน ๆ แต่ละส่วนมีแรงบิดคงตัวกระทำ ตัวอย่างเช่น ตัดเพลาออกเป็นสามส่วน คือ AB BC และ CD แต่ละส่วนอยู่ภายใต้แรงบิดเพียงอย่างเดียว

การวิเคราะห์นั้นให้หาขนาดและทิศทางของแรงบิดภายในที่เกิดขึ้นในแต่ละส่วนของเพลา โดยเขียนรูปอิสระและแก้ปัญหาโดยใช้สมการสมดุล ขั้นตอนนี้แสดงดังรูปที่ 4.14 (ข) (ค) และ (ง) ขั้นแรกให้ตัดเพลาในส่วน CD ซึ่งจะมีแรงบิดภายใน T_{CD} มีค่าเท่ากับ $-T_1-T_2+T_3$ จากรูปอิสระจะเห็นว่า T_{BC} เท่ากับ $-T_1-T_2$ และจากรูปสุดท้ายเราจะได้ว่า T_{AB} เท่ากับ $-T_1$ ดังนั้น

$$T_{CD}=-T_1-T_2+T_3 \qquad \text{(ก)}$$

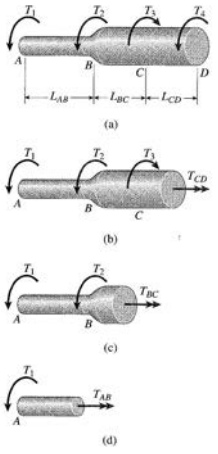
$$T_{BC}=-T_1-T_2 \qquad \text{(ข)}$$

$$T_{AB}=-T_1 \qquad \text{(ค)}$$

แรงบิดแต่ละตัวจะคงตัวตลอดความยาวในช่วงที่กระทำ

เมื่อต้องการหาความเค้นเฉือนในเพลาแต่ละส่วน จำเป็นต้องรู้ขนาดของแรงบิดภายใน ซึ่งทิศทางของความเค้นจะไม่สนใจ อย่างไรก็ตามเมื่อต้องการหามุมบิดตลอดเพลา เราจำเป็นต้องรู้ทิศทางของการบิดในแต่ละส่วนของเพลาเพื่อที่จะหามุมบิดรวมทั้งหมด ดังนั้นจะต้องกำหนดเครื่องหมายพีชคณิตของแรงบิดภายใน คือ แรงบิดภายในมีค่าเป็นบวกเมื่อมีทิศทางของเวกเตอร์ ชี้ออกจากหน้าตัดดังรูปที่ 4.14(ข) (ค) และ (ง) การคำนวณเรื่องแรงบิด ถ้ามีเครื่องหมายบวก หมายความว่าแรงบิดที่กระทำอยู่มีทิศทางตรงกับที่สมมุติไว้ แต่ถ้าแรงบิดมีเครื่องหมายลบแสดงว่ากระทำในทิศทางตรงข้าม

ความเค้นเฉือนสูงสุดหาได้จากสมการ (4.11) โดยใช้พื้นที่หน้าตัดและแรงบิดภายในที่เหมาะสม ความเค้นเฉือนสูงสุดในช่วง BC (รูปที่ 4.14) หาได้จากเส้นผ่าศูนย์กลางของเพลาในส่วนนั้น และแรงบิด T_{BC} ที่คำนวณได้จากสมการ (ข) **ความเค้นเฉือนสูงสุดตลอดเพลาคือ ความเค้นที่มากที่สุดที่เกิดจากความเค้นที่คำนวณได้ในเพลาแต่ละส่วนจากทั้งหมดสามส่วน**



รูปที่ 4.14 เพลาที่รับแรงบิดไม่สม่ำเสมอ

มุมบิดของเพลาแต่ละส่วนหาได้จากสมการ (4.15) มุมบิดรวมของปลายเพลาด้านหนึ่งเทียบกับปลายเพลาอีกด้านหนึ่งหาได้จากสมการดังนี้

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 + ... + \phi_n \tag{4.19}$$

เมื่อ ϕ_1 คือ มุมบิดของเพลาส่วนที่หนึ่ง ϕ_2 คือ มุมบิดของเพลาส่วนที่สองและต่อไปเรื่อย ๆ และ n เป็นจำนวนส่วนของเพลาที่ตัด

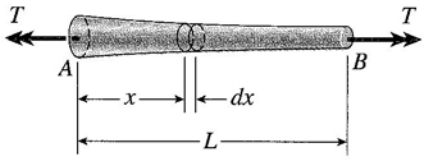
ซึ่งมุมบิดในแต่ละส่วนของเพลาสามารถเขียนอยู่ในรูปทั่ว ๆ ไปได้ดังนี้

$$\phi = \sum_{i=1}^{n} \phi_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{T_i L_i}{J_i G_i} \tag{4.20}$$

ตัวห้อย i เป็นจำนวนของพื้นที่หน้าตัด T_i คือ แรงบิดภายใน L_i คือ ความยาว และ J_i คือ โมเมนต์ความเฉื่อยเชิงขั้ว แรงบิดอาจมีค่าเป็นบวกหรือลบ ซึ่งจะต้องนำเครื่องหมายทางพีชคณิตมาคิดด้วย จึงจะได้มุมบิดทั้งหมดของเพลา

กรณีที่ 2 เพลาที่มีหน้าตัดเปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่องและมีแรงบิดคงตัว

พิจารณารูปที่ 4.15 เมื่อมีแรงบิดคงตัวกระทำกับเพลา ความเค้นเฉือนสูงสุดจะเกิดขึ้นที่หน้าตัดเล็กที่สุด



รูปที่ 4.15 เพลาที่มีหน้าตัดเปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่อง
และมีแรงบิดคงตัวกระทำ

การหามุมบิดเราพิจารณาเพลาในช่วงความยาว dx ที่ระยะ x จากปลายด้านหนึ่งของเพลา (รูปที่ 4.15) มุมในการหมุน $d\phi$ สำหรับเอลิเมนต์ คือ

$$d\phi = \frac{T dx}{J(x) G} \tag{ค}$$

เมื่อ $J(x)$ เป็นโมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่หน้าตัดที่ระยะ x จากปลายเพลา มุมบิดทั้งหมดคือผลรวมของมุมในการหมุนทั้งหมด

$$\phi = \int_0^L d\phi = \int_0^L \frac{T dx}{J(x) G} \tag{4.21}$$

ถ้านิพจน์ของโมเมนต์ความเฉื่อยเชิงขั้ว $J(x)$ ไม่ซับซ้อนมากเกินไปก็จะสามารถคำนวณหามุมบิดได้โดยการวิเคราะห์ แต่ถ้านิพจน์มีความซับซ้อนมากจะต้องใช้วิธีเชิงตัวเลข

กรณีที่ 3 เพลาที่มีหน้าตัดเปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่องและแรงบิดเปลี่ยนแปลงอย่างต่อเนื่อง

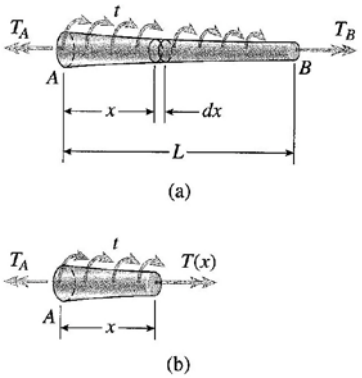
เพลาดังรูปที่ 4.16(ก) มีแรงบิดกระจาย t ต่อหน่วยความยาวของเพลา ดังนั้นแรงบิดภายใน $T(x)$ จะแปรเปลี่ยนอย่างสม่ำเสมอตลอดความยาวของเพลาดังรูปที่ 4.16(ข) แรงบิดภายในสามารถหาได้จากแผนภาพรูปอิสระและใช้สมการความสมดุล ดังเช่นกรณีที่ 2 ค่า $J(x)$ สามารถหาได้จากขนาดของหน้าตัดของเพลา

เรารู้ว่าทั้งแรงบิดและโมเมนต์ความเฉื่อยเป็นฟังก์ชันของ x เราสามารถใช้สูตรแรงบิดเพื่อหาความเค้นเฉือนที่แปรเปลี่ยนตามแนวแกน x หน้าตัดที่มีความเค้นเฉือนมากที่สุดสามารถกำหนดได้และความเค้นเฉือนสูงสุดสามารถหาได้

มุมบิดของเพลาดังรูปที่ 4.16(ก) สามารถหาได้ในทำนองเดียวกับกรณีที่ 2 แตกต่างเฉพาะแรงบิดที่คล้ายกับโมเมนต์ความเฉื่อยที่เป็นฟังก์ชันของ x สมการสำหรับหามุมบิดจะกลายเป็น

$$\phi = \int_0^L d\phi = \int_0^L \frac{T(x)dx}{GJ(x)} \tag{4.22}$$

อินทิกรัลนี้สามารถประเมินได้จากการวิเคราะห์ในบางกรณี แต่มักจะจำเป็นต้องประเมินเชิงตัวเลข



รูปที่ 4.16 เพลาที่อยู่ภายใต้แรงบิดไม่สม่ำเสมอ

4.5 การส่งถ่ายกำลังด้วยเพลากลม (Transmission of Power by Circular Shafts)

การใช้ประโยชน์ของเพลากลม คือ การวางแผนเพื่อใช้ส่งถ่ายกำลังกลจากอุปกรณ์ตัวหนึ่งไปยังอุปกรณ์อีกตัวหนึ่ง ดังเช่น เพลาขับของรถยนต์ เพลาขับใบพัดเรือ เป็นต้น กำลังที่ถูกส่งถ่ายจะส่งไปในลักษณะของการหมุนของเพลา และกำลังที่ส่งถ่ายไปยังขึ้นอยู่กับขนาดของแรงบิดและความเร็วรอบในการหมุน ปัญหาในการออกแบบโดยทั่ว ๆ ไป คือ ขนาดของเพลาที่ต้องการเพื่อใช้ส่งกำลังด้วยความเร็วรอบที่กำหนด โดยจะทำให้มีความเค้นไม่เกินค่าที่กำหนดของวัสดุ

สมมุติให้มอเตอร์ขับเพลาที่กำลังหมุนด้วยความเร็วเชิงมุม ω มีหน่วยเป็น rad/s เพลาส่งถ่ายแรงบิด T ให้อุปกรณ์เพื่อใช้ประโยชน์ดังรูปที่ 4.19

โดยทั่ว ๆ ไป งาน W เกิดจากแรงบิดที่มีค่าคงตัวคูณกับมุมของเพลาที่เปลี่ยนไป

$$W = T\theta \tag{4.27}$$

เมื่อ θ คือ มุมในการหมุน

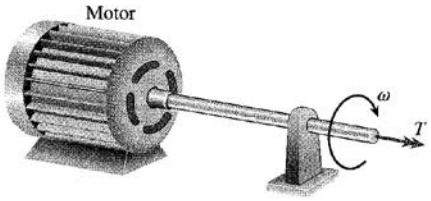
กำลัง (Power)

กำลัง คือ อัตราการทำงานเทียบต่อหน่วยเวลา

$$P = \frac{dW}{dt} = T\frac{d\theta}{dt} \tag{4.28}$$

เมื่อ P คือ กำลัง และ t คือ เวลา อัตราการเปลี่ยนแปลง $d\theta/dt$ ของการกระจัดเชิงมุม θ คือ ความเร็วเชิงมุม ω จะได้

$$P = T\omega \tag{4.29}$$



รูปที่ 4.19 เพลาส่งถ่ายกำลังด้วยแรงบิดคงตัว T ที่ความเร็วเชิงมุม ω

หน่วยที่ใช้ในสมการ (4.29) จะเป็นดังนี้ ถ้าแรงบิด T เป็น $\mathrm{N \cdot m}$ กำลังจะมีหน่วยเป็น วัตต์ (watt, W) กำลังหนึ่งวัตต์จะเท่ากับ $1\,\mathrm{N \cdot m/s}$ หรือ $1\,\mathrm{J/s}$ ถ้า T แสดงเป็น $\mathrm{lb\text{-}ft}$ แล้วกำลังจะมีหน่วยเป็น $\mathrm{lb-ft/s}$

ความเร็วเชิงมุมบ่อยครั้งแสดงเป็นความถี่ของการหมุน (frequency of rotation) ซึ่งจะเป็นจำนวนรอบหมุนต่อหน่วยเวลา หน่วยของความถี่เรียกว่า **เฮิรต์** (hertz, Hz) มีค่าเท่ากับหนึ่งรอบต่อวินาที หนึ่งรอบหมุนจะเท่ากับ 2π เรเดียน จะได้

$$\omega = 2\pi f \tag{4.30}$$

เมื่อ ω มีหน่วยเป็น $\mathrm{rad/s}$ และ f มีหน่วยเป็น Hz หรือ $\mathrm{s^{-1}}$

ดังนั้น กำลังในสมการ (4.29) จะกลายเป็น

$$P = 2\pi f T \tag{4.31}$$

โดยทั่ว ๆ ไปจำนวนรอบต่อเวลาหนึ่งนาที (rpm) แสดงด้วยตัวอักษร n ดังนั้นจะได้ความสัมพันธ์

$$n = 60\,f \tag{4.32}$$

และ

$$P = \frac{2\pi n T}{60} \tag{4.33}$$

ในระบบอังกฤษจะแสดงกำลังในรูปของแรงม้า (horsepower, hp) หนึ่งแรงม้าจะเท่ากับ $550\ \mathrm{lb-ft/s}$ ดังนั้นแรงม้าที่ถูกส่งถ่ายโดยเพลาหมุน คือ

$$H = \frac{2\pi n T}{60(550)} = \frac{2\pi n T}{33{,}000} \tag{4.34}$$

หนึ่งแรงม้ามีค่าประมาณ 746 วัตต์

4.6 **เพลาบิดที่หาค่าไม่ได้ทางสถิตศาสตร์** (Statically Indeterminate Torsional Shafts)

เพลาที่สามารถหาค่าได้ทางสถิตศาสตร์ (statically determinate) นั้นคือ เมื่อวาดรูปอิสระ สามารถหาแรงบิดภายในเพลาหรือแรงปฏิกิริยาได้โดยใช้สมการสมดุล แต่ถ้าเพิ่มจุดบังคับ เช่น เพิ่มจุดยึดปลายเพลาเข้าไปอีกหนึ่งด้านทำให้เพลาถูกยึดปลายทั้งสองด้าน ดังนั้นสมการสมดุลไม่สามารถที่จะหาแรงบิดได้ เพลานี้มีการยึดแบบนี้จะกลายเป็นปัญหาที่หาค่าไม่ได้ทางสถิติศาสตร์ในการหาผลเฉลยจะต้องใช้สมการเข้ากันได้ (compatibility equation) ที่ได้จากการวิเคราะห์ปัญหา

ขั้นตอนแรกในการวิเคราะห์จะต้องเขียนสมการความสมดุลจากแผนภาพรูปอิสระ ปริมาณที่ไม่รู้ในสมการสมดุลจะเป็นแรงบิด แรงบิดภายใน หรือแรงบิดต้านทาน

ขั้นตอนที่สองจะต้องเขียนสมการความสมเหตุผล ซึ่งเกี่ยวข้องกับสภาวะทางฟิสิกส์ คือ มุมบิด ดังนั้นสมการเข้ากันได้จะเกี่ยวข้องกับมุมบิดที่ไม่รู้ค่า

ขั้นตอนที่สามเป็นการหาความสัมพันธ์ของมุมบิดกับแรงบิดจากสมการ $\phi = TL/JG$ แทนค่าลงในสมการเข้ากันได้ ซึ่งจะติดตัวที่ไม่รู้ค่า คือ แรงบิด หลังจากนั้นทำการหาค่าแรงบิดโดยการแก้สมการเข้ากันได้และสมการความสมดุลพร้อม ๆ กัน

บทที่ 5

แรงเฉือนและโมเมนต์ดัด

(SHEAR FORCES AND BENDING MOMENTS)

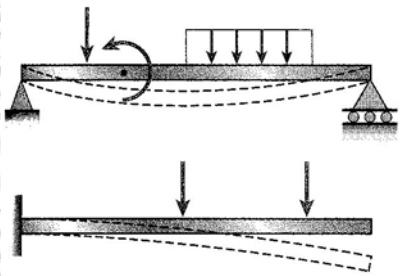
5.1 บทนำ (Introduction)

ชิ้นส่วนที่เกี่ยวกับโครงสร้างจะถูกแบ่งออกตามชนิดของภาระหรือแรงที่มากระทำ แท่งวัสดุที่ถูกกระทำด้วยแรงตามแนวนอน เวกเตอร์ของแรงเหล่านี้จะมีทิศทางตามแกนของแท่งวัสดุ แท่งวัสดุที่รับแรงบิด เวกเตอร์ของแรงบิดจะอยู่ตามแนวแกน เราจะศึกษาคานดังรูปที่ 5.1 ซึ่งเป็นชิ้นส่วนเกี่ยวกับโครงสร้างที่รับแรงภายนอก (lateral loads)

คานดังรูปที่ 5.1 ถูกจัดเป็นโครงสร้างบนระนาบ (planar structure) เพราะอยู่บนระนาบเดียว ถ้าแรงที่กระทำอยู่บนระนาบเดียวกันและการเบนทั้งหมดของคานเกิดขึ้นบนระนาบนั้น เราจะเรียกระนาบนั้นว่า **ระนาบการเบน** (plane of bending)

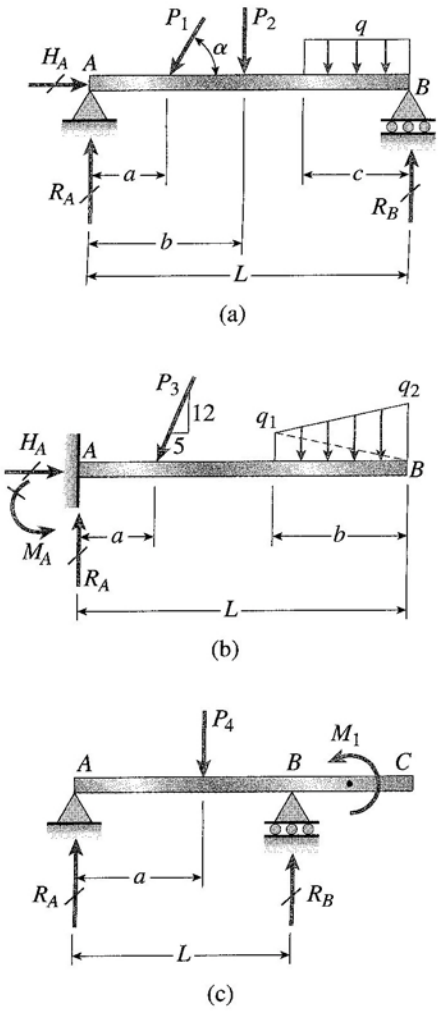
5.2 ชนิดของคาน ภาระ และปฏิกิริยา (Types of Loads and Reactions)

คานมักจะถูกอธิบายในรูปแบบที่มันถูกรองรับ คานที่มีจุดรองรับเป็นสลักด้านหนึ่งและปลายอีกด้านหนึ่งเป็นแบบลูกกลิ้งดังรูปที่ 5.2(ก) เรียกคานประเภทนี้ว่า คานที่ถูกรองรับอย่างง่าย (simply supported beam) หรือคานอย่างง่าย (simple beam) คุณลักษณะที่สำคัญของจุดรองรับที่เป็นสลักคือ มันป้องกันการเลื่อนที่ปลายของคาน แต่คานสามารถหมุนได้บนระนาบ จุดรองรับนี้เป็นสลักทำให้เกิดแรงปฏิกิริยาทั้งแนวตั้งและแนวนอน (H_A และ R_A) แต่ไม่สามารถทำให้เกิดปฏิกิริยาของโมเมนต์ได้



รูปที่ 5.1 คานที่รับภาระแบบต่าง ๆ

ที่ปลาย B ของคาน (รูปที่ 5.2ก) จุดรองรับ แบบลูกกลิ้ง (roller support) จะป้องกันการเลื่อนในทิศทางตามแนวตั้ง จุดรองรับนี้สามารถต้านทานแรงในแนวตั้ง (R_B) ได้ แต่ไม่สามารถต้านแรงตามแนวนอนได้ แกนของคานจะเป็นอิสระต่อการหมุนที่จุด B โดยมีจุดหมุนอยู่ที่ A แรงปฏิกิริยาในแนวนอนที่สลักอาจมีทิศทางชี้ไปทางซ้ายหรือขวาทางใดทางหนึ่ง จากรูปแรงปฏิกิริยาจะแสดงด้วยลูกศรที่มีเส้นตัดขวาง



รูปที่ 5.2 ชนิดของคานที่รับภาระแบบต่าง ๆ

(ก) คานที่มีจุดรองรับอย่างง่าย

(ข) คานยื่น

(ค) คานยื่นเลยจุดรองรับ

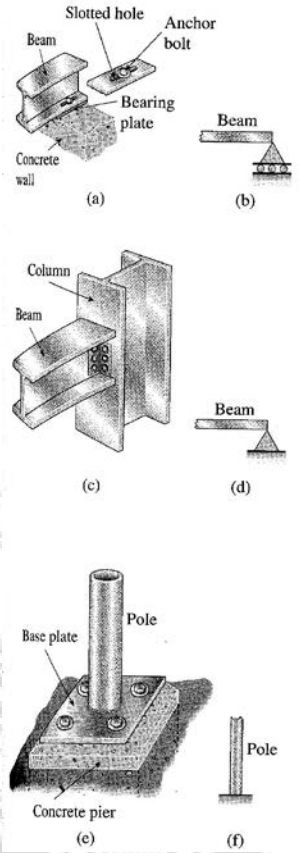
คานที่แสดงดังรูปที่ 5.2(ข) ซึ่งปลายด้านหนึ่งยึดแน่นอยู่กับผนังส่วนปลายอีกด้านหนึ่งเป็นอิสระเรียกว่า **คานยื่น** (cantilever beam) ปลายที่ถูกยึดแน่นจะไม่สามารถเลื่อนหรือหมุนได้ ขณะที่ปลายอิสระสามารถหมุนหรือเลื่อนได้

ตัวอย่างที่สามเป็นคานที่ยื่นเลยจุดรองรับออกมา (beam with an overhang) ดังรูปที่ 5.2(ค) คานนี้ถูกรองรับอย่างง่าย ๆ ที่จุด A และ B นั้นคือเป็นสลักที่จุด A และเป็นลูกกลิ้งที่จุด B แต่คานจะยื่นเลยจุด B ในส่วน BC ของคานจะคล้ายกับคานยื่น ยกเว้นว่าแกนของคานอาจจะหมุนที่จุด B

เมื่อทำการวาดรูปคราว ๆ ของคานเราจะใช้สัญลักษณ์ของจุดรองรับดังรูปที่ 5.2 สัญลักษณ์เหล่านี้จะใช้แสดงข้อจำกัดที่คานจะถูกบังคับ ซึ่งสัญลักษณ์เหล่านี้จะแสดงแรงปฏิกิริยาและโมเมนต์ อย่างไรก็ตามสัญลักษณ์เหล่านี้ไม่ได้แสดงโครงสร้างที่แท้จริง รูปที่ 5.3(ก) คานที่วางอยู่บนพื้นคอนกรีตและยึดอยู่ด้วยสมอบก คานสามารถเลื่อนไปมาได้โดยผ่านร่องที่อยู่บนคาน การต่อแบบนี้คานจะต้านทานการเคลื่อนที่ในแนวดิ่ง (อาจจะมีทิศทางขึ้นหรือลง) แต่ไม่ได้ป้องกันการเคลื่อนที่ตามแนวตั้ง ดังนั้นการหมุนของแกนคานตามแนวยาวจะน้อยมากอาจตัดทิ้งได้ การรองรับแบบนี้มักแสดงด้วยลูกกลิ้งดังรูป (ข)

ตัวอย่างที่สอง (รูปที่ 5.3ค) คานที่ยึดต่ออยู่กับเสาโดยใช้สลักเกลียว แบบของการรองรับอย่างนี้มักจะสมมุติให้ต้านทานการเคลื่อนที่ตามแนวนอนและแนวตั้ง แต่ไม่ต้านทานการหมุนเพราะทั้งมุมและเสาสามารถโค้งงอได้ ดังนั้นแบบนี้แสดงเป็นการรองรับแบบสลักสำหรับคาน (รูปที่ 5.3ง)

ตัวอย่างสุดท้าย (รูปที่ 5.3ง) เป็นเสาโลหะที่เชื่อมติดอยู่กับแผ่นฐานที่ยึดอยู่กับแท่นคอนกรีตบนพื้น ซึ่งที่ฐานของเสานี้จะต้านทานได้ทั้งการเลื่อนและการหมุนดังรูปที่ 5.3(ฉ)



รูปที่ 5.3 คานที่รองรับอยู่บนผนัง

(ก) โครงสร้างที่แท้จริง

(ข) แสดงการรองรับด้วยลูกกลิ้ง

(ค) โครงสร้างที่แท้จริง

(ง) แสดงการรองรับด้วยลูกกลิ้ง

(จ) เสาที่ผังอยู่กับแท่นคอนกรีต

(ฉ) แสดงเป็นการรองรับแบบยึดตาย

ชนิดของภาระ (Types of Loads)

ชนิดของภาระหลายแบบที่กระทำกับคานดังรูปที่ 5.2 เมื่อมีภาระกระทำบนพื้นที่ ๆ เล็กมาก เราเรียกภาระนี้ว่า **concentrated loads** ซึ่งจะเป็นแรงเดียว ตัวอย่างเช่น $P_1, P_2, P_3,$ และ P_4 เมื่อภาระกระจายตามแนวแกนของคาน เรียกว่า **แรงกระจาย** (distributed load) เช่น แรง q ในส่วนรูป (ก) แรงกระจายนี้ถูกเรียกว่า **ความ**

เข้ม (intensity) แสดงด้วยหน่วยของแรงต่อหน่วยของระยะทาง แรงกระจายอย่างสม่ำเสมอ (uniformly distributed load) หรือ แรงสม่ำเสมอ (uniform load) มีความเข้มคงตัว q ต่อหน่วยระยะทางดังรูปที่ 5.2(ก) แรงเปลี่ยนแปลงที่มีความเข้มเปลี่ยนแปลงตามระยะทางของแกนคาน แรงที่มีการเปลี่ยนแปลงเชิงเส้นตรง (linearly varying load) ของรูปที่ 5.2(ข) มีความเข้มแปรเปลี่ยนเชิงเส้นตรงจาก q_1 ถึง q_2 แรงชนิดอื่นคือ โมเมนต์ (couple) แสดงด้วย M_1 กระทำบนคานส่วนที่ยื่นเลยจุดรองรับ (รูปที่ 5.2ค)

แรงปฏิกิริยา (Reaction)

การหาแรงปฏิกิริยาเป็นขั้นตอนแรกในการวิเคราะห์คาน ถ้ารู้แรงปฏิกิริยาก็สามารถหาแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดได้ ซึ่งคานจะเป็นแบบที่ถูกรองรับในแบบที่หาค่าได้ทางสถิตศาสตร์ โดยหาได้จากแผนภาพรูปอิสระและสมการความสมดุล

พิจารณาการหาแรงปฏิกิริยาของคานอย่างง่าย AB ดังรูปที่ 5.2(ก) คานนี้มีแรงเอียง P_1 แรงในแนวตั้ง P_2 และแรงกระจายสม่ำเสมอที่มีความเข้ม q คานนี้จะมีแรงปฏิกิริยาที่ไม่รู้ค่าสามตัวคือ แรงตามแนวนอน H_A ที่จุดรองรับ และแรงแนวตั้ง R_B ที่จุดรองรับแบบลูกกลิ้ง สำหรับโครงสร้างบนระนาบเรารู้จากสถิตศาสตร์ว่าเราสามารถเขียนสมการสมดุลที่เป็นอิสระกันได้สามสมการ ดังนั้นจะมีแรงปฏิกิริยาที่ไม่รู่ค่าสามตัวและสามสมการ

สมการสมดุลตามแนวนอน คือ

$$\sum F_{horiz} = 0$$

$$H_A - P_1\cos\alpha = 0$$

จะได้

$$H_A = P_1\cos\alpha = 0$$

หาแรงปฏิกิริยาแนวตั้ง R_A และ R_B เราเขียนสมการการสมดุลของโมเมนต์รอบจุด B และ A โดยกำหนดให้ทิศทางทวนเข็มนาฬิกาเป็นบวก

$$\sum M_B = 0$$

$$-R_A L + (P_1\sin\alpha)(L-a) + P_2(L-b) + \frac{qc^2}{2} = 0$$

$$\sum M_A = 0$$

$$R_B L - (P_1\sin\alpha)(a) - P_2 b - qc\left(L - \frac{c}{2}\right) = 0$$

แก้สมการหาค่า R_A และ R_B จะได้

$$R_A = \frac{(P_1\sin\alpha)(L-a)}{L} + \frac{P_2(L-b)}{L} + \frac{qc^2}{2L}$$

$$R_B = \frac{(P_1\sin\alpha)(a)}{L} + \frac{P_2 b}{L} + \frac{qc(L-c/2)}{L}$$

ตัวอย่างที่สองพิจารณาคานยื่นดังรูปที่ 5.2(ข) ภาระที่กระทำประกอบด้วยแรงเอียง P_3 และแรงกระจายเปลี่ยนแปลงอย่างเป็นเส้นตรงแสดงด้วยแผนภาพของรูปสี่เหลี่ยมคางหมูที่มีความเข้มของแรงแปรเปลี่ยนจาก q_1 ถึง q_2 แรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับคือ แรงในแนวนอน H_A แรงแนวยืน R_A และโมเมนต์ M_A ความสมดุลตามแนวนอนคือ

$$H_A = \frac{5P_3}{13}$$

และความสมดุลแนวตั้ง คือ

$$R_A = \frac{12P_3}{13} + \left(\frac{q_1 + q_2}{2}\right)b$$

ในการหาแรงปฏิกิริยาเรารู้จากความจริงที่ว่าผลลัพธ์ของแรงกระจายเท่ากับพื้นที่ของแผนภาพรูปสี่เหลี่ยมคางหมู

โมเมนต์ปฏิกิริยา M_A ที่จุดรองรับหาได้จากสมการความสมดุลของโมเมนต์ โมเมนต์ที่เกิดขึ้นเนื่องจากแรงกระจายหาได้จากการแบ่งรูปสี่เหลี่ยมคางหมูเป็นรูปสามเหลี่ยมสองรูปดังแสดงด้วยเส้นประดังรูปที่ 5.2(ข) ในแต่ละรูปของแรงกระจายรูปสามเหลี่ยมสามารถแทนได้ด้วยแรงลัพธ์เพียงตัวเดียวที่กระทำผ่านจุดศูนย์ถ่วงของรูปสามเหลี่ยม ดังนั้นโมเมนต์รอบจุด A ของรูปสามเหลี่ยมล่างคือ

$$\left(\frac{q_1 b}{2}\right)\left(L - \frac{2b}{3}\right)$$

ซึ่ง $q_1 b/2$ เป็นแรงลัพธ์ (เท่ากับแผนภาพของพื้นที่รูปสามเหลี่ยม) และ $L - 2b/3$ คือแขนของโมเมนต์ (รอบจุด A) ส่วนโมเมนต์สามเหลี่ยมรูปบนก็ทำในทำนองเดียวกัน สุดท้ายสมการของโมเมนต์คือ

$$\sum M_A = 0$$

$$M_A - \left(\frac{12P_3}{13}\right)a - \frac{q_1 b}{2}\left(L - \frac{2b}{3}\right) - \frac{q_2 b}{2}\left(L - \frac{b}{3}\right) = 0$$

ซึ่ง

$$M_A = \left(\frac{12P_3}{13}\right)a + \frac{q_1 b}{2}\left(L - \frac{2b}{3}\right) + \frac{q_2 b}{2}\left(L - \frac{b}{3}\right)$$

สมการนี้จะให้ค่าโมเมนต์เป็นบวกแสดงว่าโมเมนต์ปฏิกิริยา M_A ที่สมมุติทิศทางไว้ถูกต้อง นั้นคือ หมุนทวนเข็มนาฬิกา

คานที่ยื่นเลยออกมาจากจุดรองรับ (beam with an overhang) ดังรูปที่ 5.2(ค) โดยมีแรงแนวตั้ง P_4 และโมเมนต์ M_1 กระทำ ดังนั้นเขียนสมการสมดุลสองสมการที่เป็นอิสระแก่กัน ซึ่งอาจจะเป็นสมการโมเมนต์สองสมการหรือสมการโมเมนต์หนึ่งสมการกับสมการแรงในแนวตั้งอีกหนึ่งสมการ ขั้นแรกเขียนสมการโมเมนต์รอบจุด B และสมการโมเมนต์ที่สองรอบจุด A โดยกำหนดให้ทิศทางทวนเข็มนาฬิกาเป็นบวก

$$\sum M_B = 0$$

$$-R_A L + P_4(L - a) + M_1 = 0$$

และ

$$\sum M_A = 0$$

$$-P_4 a + R_B L + M_1 = 0$$

ดังนั้นแรงปฏิกิริยาคือ

$$R_A = \frac{P_4(L - a)}{L} + \frac{M_1}{L}$$

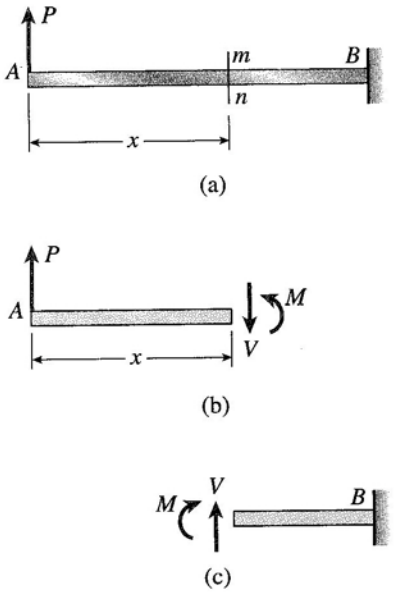
$$R_B = \frac{P_4 a}{L} - \frac{M_1}{L}$$

5.3 **แรงเฉือนและโมเมนต์ดัด** (Shear Forces and Bending Moments)

เมื่อคานถูกแรงหรือโมเมนต์กระทำ จะทำให้เกิดความเค้นและความเครียดขึ้นตลอดภายในคาน การหาความเค้นและความเครียดอันดับแรกจำเป็นจะต้องหาแรงภายในและโมเมนต์ภายในที่กระทำบนหน้าตัดคาน

พิจารณาคานยื่น AB ดังรูปที่ 5.4 แรง P กระทำที่ปลายอิสระ เราตัดคานที่หน้าตัด mn ห่างจากปลายอิสระเป็นระยะ x แยกชิ้นส่วนทางด้านซ้ายของคานออกแล้วเขียนเป็นรูปอิสระ (รูปที่ 5.4ข) รูปอิสระนี้อยู่ในสภาวะสมดุลโดยแรง P และความเค้นที่กระทำบนพื้นที่หน้าตัด ซึ่งแสดงลักษณะการกระทำทางด้านขวามือของชิ้นส่วนคานด้านซ้าย ในขั้นตอนนี้เราจะไม่รู้การกระจายของความเค้นที่กระทำบนพื้นที่หน้าตัด เรารู้ว่าผลลัพธ์ของความเค้นเหล่านี้จะอยู่ในสภาวะสมดุล

ผลลัพธ์ของความเค้นที่กระทำบนพื้นที่หน้าตัดสามารถลดรูปเป็น แรงเฉือน (V) และโมเมนต์ดัด (M) ดังรูปที่ 5.4(ข) เพราะแรง P กระทำขวางกับแนวแกนของคาน ไม่มีแรงตามแนวแกนที่หน้าตัด แรงเฉือนและโมเมนต์ดัดกระทำบนระนาบของคาน นั้นคือเวกเตอร์ของแรงเฉือนจะอยู่บนระนาบของรูปและเวกเตอร์ของโมเมนต์จะตั้งฉากกับระนาบ



รูปที่ 5.4 แรงเฉือน (V) และโมเมนต์ดัด (M)

แรงเฉือนและโมเมนต์ดัดเหมือนแรงตามแนวแกนในแท่งวัสดุและแรงบิดภายในเพลา ซึ่งเป็นผลลัพธ์ของการกระจายตัวของแรงบนพื้นที่หน้าตัด ดังนั้นปริมาณเหล่านี้จึงเป็นผลลัพธ์ของความเค้น (stress resultants)

ผลลัพธ์ของความเค้นในคานที่หาได้ทางสถิตศาสตร์สามารถคำนวณได้จากสมการความสมดุล ในกรณีของคานยื่นดังรูปที่ 5.4(ก) เราใช้แผนภาพรูปอิสระของรูปที่ 5.4(ข) ผลรวมของแรงในแนวตั้งและโมเมนต์รอบพื้นที่หน้าตัดจะได้

$$\sum F_{vert} = 0$$

$$P - V = 0 \text{ หรือ } V = P$$

$\sum M = 0$

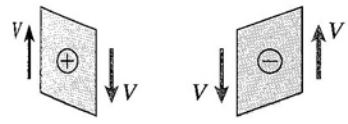
$M - Px = 0$ หรือ $M = Px$

เมื่อ x เป็นระยะจากปลายอิสระของคานถึงพื้นที่หน้าตัด เมื่อ V และ M กำลังจะหา ดังนั้นเราสามารถหาแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดได้

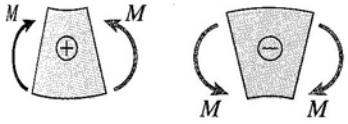
การตกลงเรื่องเครื่องหมาย (Sign Conventions)

พิจารณาข้อตกลงเรื่องเครื่องหมายสำหรับแรงเฉือนและโมเมนต์ดัด ข้อกำหนดเพื่อสมมุติว่าแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดเป็นบวกเมื่อกระทำในทิศทางดังรูปที่ 5.4(ข) นั้นคือแรงเฉือนพยายามหมุนคานในทิศทางตามเข็มนาฬิกาและโมเมนต์ดัดพยายามอัดเนื้อส่วนบนของคานและยืดส่วนล่างของคาน

รูปที่ 5.5



(a)



(b)

รูปที่ 5.6

การกระทำของความเค้นที่มีขนาดเดียวกันเหล่านี้แต่ทิศทางตรงกันข้ามดังรูปที่ 5.4(ค) ทิศทางของแรงและโมเมนต์ดัดจะมีทิศทางตรงกันข้าม แรงเฉือนกระทำขึ้นและโมเมนต์ดัดกระทำในทิศทางตามเข็มนาฬิกา อย่างไรก็ตามแรงเฉือนพยายามทำให้คานหมุนในทิศทางตามเข็มนาฬิกาและโมเมนต์ดัดพยายามพยายามอัดเนื้อส่วนบนของคานและยืดส่วนล่างของคาน

แรงเฉือนและโมเมนต์ดัดที่มีค่าเป็นบวกหรือลบแสดงดังรูปที่ 5.5 แรงและโมเมนต์ที่กระทำบนส่วนของคานที่ตัดออกมาระหว่างสองหน้าตัดที่มีระยะห่างกัน dx การเปลี่ยนรูปของเอลิเมนต์ทั้งแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดที่มีค่าเป็นบวกหรือลบแสดงดังรูปที่ 5.6 เราจะเห็นว่าแรงเฉือนที่มีค่าเป็นบวกจะทำให้เอลิเมนต์เกิดการเปลี่ยนรูปโดยผิวหน้าด้านขวาจะเคลื่อนที่ลงเมื่อเทียบกับผิวหน้าด้านซ้ายและโมเมนต์ดัดที่มีค่าเป็นบวกจะอัดส่วนบนของคานและยืดส่วนล่างของคานออก

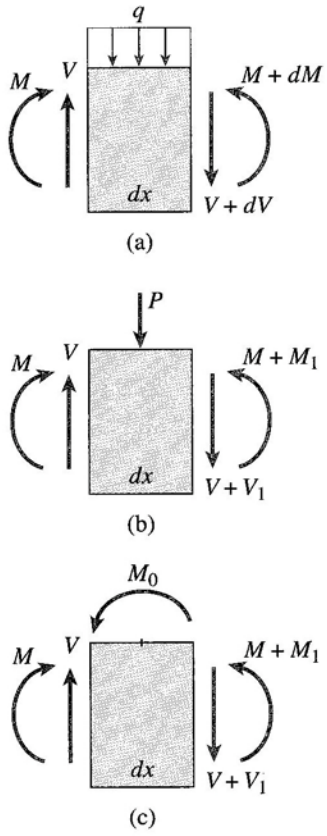
5.4 ความสัมพันธ์ระหว่างภาระ แรงเฉือน และโมเมนต์ดัด

(Relationship between Loads, Shear Forces and Bending Moments)

ความสัมพันธ์ระหว่างภาระ แรงเฉือน และโมเมนต์ดัดจะเป็นประโยชน์มากเมื่อแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดกระทำตลอดความยาวคานและช่วยในการสร้างแผนภาพของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัด

พิจารณาส่วนของคานที่ตัดออกมามีความยาว dx (รูปที่ 5.10) ภาระที่กระทำบนผิวด้านบนของคานอาจเป็นแรงกระจาย แรงกระทำเป็นจุดหรือโมเมนต์ดังรูปที่ 5.10(ก) (ข) และ (ค) ข้อตกลงเรื่องเครื่องหมายของแรง

เหล่านี้จะเป็นดังนี้ ภาระกระจายสม่ำเสมอและภาระกระทำเป็นจุดจะมีค่าเป็นบวกเมื่อมีทิศกระทำลงและมีเครื่องหมายเป็นลบเมื่อกระทำขึ้น โมเมนต์ที่กระทำกับคานเป็นบวกเมื่อกระทำในทิศทางทวนเข็มนาฬิกาและมีค่าเป็นลบเมื่อมีทิศทางตามเข็มนาฬิกา



รูปที่ 5.10 เอลิเมนต์ของคานที่ใช้ในการพิสูจน์ความสัมพันธ์
ระหว่างภาระ แรงเฉือน และโมเมนต์ดัด

แรงเฉือนและโมเมนต์ดัดที่กระทำทางด้านข้างของคานแสดงในทิศทางบวกดังรูปที่ 5.10 โดยทั่วไปแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดจะแปรเปลี่ยนตามความยาวของคาน ดังนั้นค่าทางผิวหน้าด้านขวาของเอลิเมนต์อาจจะแตกต่างจากค่าทางผิวหน้าด้านซ้าย ในกรณีของภาระกระจายสม่ำเสมอ (รูปที่ 5.10ก) ส่วนเพิ่มของ V และ M มีค่าน้อยมาก เราแสดงด้วย dV และ dM ผลลัพธ์ของความเค้นที่ได้ทางผิวหน้าด้านขวาของเอลิเมนต์จะเป็น $V+dV$ และ $M+dM$ ในกรณีของภาระแบบจุด (รูปที่ 5.10ข) หรือโมเมนต์ (รูปที่ 5.10ค) ส่วนเพิ่มนี้อาจหาได้และแสดงด้วย V_1 และ M_1 ผลลัพธ์ของความเค้นที่กระทำทางผิวหน้าด้านขวาของเอลิเมนต์คือ $V+V_1$ และ $M+M_1$

ภาระแต่ละชนิดที่กระทำกับคานเราสามารถเขียนสมการสมดุลสำหรับเอลิเมนต์ได้สองสมการนั้นคือ สมการสมดุลแรงและสมการสมดุลโมเมนต์ สมการสมดุลแรงจะให้ความสัมพันธ์ระหว่างภาระที่กระทำและแรงเฉือน และสมการสมดุลโมเมนต์จะให้ความสัมพันธ์ระหว่างแรงเฉือนและโมเมนต์ดัด

ภาระกระจายสม่ำเสมอ (Distributed Loads)

ภาระกระจายสม่ำเสมอที่มีความเข้ม q ดังรูปที่ 5.10(ก) สมการสมดุลแรงในแนวตั้งต้องเท่ากับศูนย์ กำหนดให้ทิศทางชี้ขึ้นเป็นบวก

$$\overset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0;$$

$$V - qdx - (V + dV) = 0$$

หรือ

$$\frac{dV}{dx} = -q \tag{5.4}$$

สมการ (5.4) เราจะเห็นว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงของแรงเฉือนที่จุดใด ๆ บนแกนของคานจะเท่ากับค่าลบของความเข้มของภาระกระจายสม่ำเสมอที่จุดเดียวกันนั้น

ประโยชน์ของความสัมพันธ์ที่ได้จากสมการ (5.4) ถ้าไม่มีภาระกระจายบนคาน (นั้นคือ $q = 0$) แล้ว $dV/dx = 0$ และแรงเฉือนจะมีค่าคงตัวในส่วนของคานนั้น ถ้าภาระกระจายสม่ำเสมอตามความยาวคาน ($q =$ ค่าคงตัว) แล้ว dV/dx จะเป็นค่าคงตัวและแรงเฉือนจะเป็นเส้นตรงในช่วงของความยาวคานนั้น

พิจารณาคานยื่นมีภาระเปลี่ยนแปลงอย่างสม่ำเสมอในตัวอย่างที่ 5.2 ภาระที่กระทำกับคาน คือ

$$q = \frac{q_0 x}{L}$$

แรงเฉือน

$$V = -\frac{q_0 x^2}{2L}$$

อนุพันธ์ dV/dx

$$\frac{dV}{dx} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{q_0 x^2}{2L}\right) = -\frac{q_0 x}{L} = -q$$

ซึ่งจะได้ค่าตรงกับสมการ (4-4)

ประโยชน์ของความสัมพันธ์ของแรงเฉือนที่หน้าตัดแตกต่างกันสองหน้าตัดของคานสามารถหาได้โดยการอินทิเกรตสมการ (5.4) ตามแกนของคาน เราคูณทั้งสองข้างของสมการ (5.4) ด้วย dx แล้วอินทิเกรตระหว่างจุด A และ B บนแกนของคาน

$$\int_A^B dV = -\int_A^B q dx \tag{ก}$$

สมมุติ x เพิ่มขึ้นจากจุด A ไป B ด้านซ้ายของสมการจะเท่ากับความแตกต่างของแรงเฉือนที่จุด B และ A คือ $(V_B - V_A)$ อินทิเกรตพจน์ทางด้านขวาจะแสดงเป็นพื้นที่ของแผนภาพภาระระหว่างจุด A และ B ดังนั้นจากสมการ (ก) จะได้

$$V_B - V_A = -\int_A^B q dx$$

$$= -(\text{พื้นที่ของแผนภาพภาระระหว่างจุด } A \text{ และ } B) \tag{5.5}$$

ในอีกความหมายหนึ่งการเปลี่ยนแปลงแรงเฉือนระหว่างจุดสองจุดตามแนวแกนของคานจะมีค่าเท่ากับค่าลบของภาระทั้งหมดที่กระทำลงระหว่างสองจุดนี้ พื้นที่ของแผนภาพภาระอาจเป็นบวก (q กระทำลง) หรือค่าลบ (ถ้า q กระทำขึ้น)

สมการ (5.4) พิสูจน์จากเอลิเมนต์ที่ถูกกระทำด้วยแรงกระจาย เราไม่สามารถใช้สมการ (5.4) ตรงจุดที่มีแรงกระทำแบบจุด จุดที่มีแรงกระทำ (เพราะ q ไม่ได้กำหนด) สำหรับเหตุผลเดียวกันเราไม่สามารถใช้สมการ (5.5) ถ้าภาระแบบจุด P กระทำบนคานระหว่าง A และ B

พิจารณาการสมดุลของโมเมนต์ของคานดังรูปที่ 5.10(ก) ผลรวมของโมเมนต์รอบแกนที่ผ่านหน้าตัดด้านซ้ายของเอลิเมนต์ (แกนที่ตั้งฉากกับระนาบของรูป) และกำหนดให้โมเมนต์ทวนเข็มนาฬิกาเป็นบวก จะได้

$$\sum M = 0$$

$$-M - qdx\left(\frac{dx}{2}\right) - (V + dV)dx + M + dM = 0$$

เนื่องจาก dx มีค่าน้อยเมื่อเทียบกับพจน์อื่น ๆ เราจะได้ความสัมพันธ์

$$\frac{dM}{dx} = V \tag{5.6}$$

สมการนี้แสดงว่าอัตราการเปลี่ยนแปลงของโมเมนต์ดัดที่จุดใด ๆ บนแกนของคานจะเท่ากับแรงเฉือนที่จุดนั้น ถ้าแรงเฉือนในช่วงนั้นเป็นศูนย์แล้วโมเมนต์ดัดจะคงตัวในช่วงคานเดียวกัน

พิจารณาคานยื่นดังรูปที่ 5.8 โมเมนต์ดัดจะมีค่าเป็น

$$M = -\frac{q_0 x^3}{6L}$$

อนุพันธ์ dM/dx จะเป็น

$$\frac{dM}{dx} = \frac{d}{dx}\left(-\frac{q_0 x^3}{6L}\right) = -\frac{q_0 x^2}{2L}$$

ซึ่งจะเท่ากับแรงเฉือนในคาน

อินทิเกรตสมการ (5.6) ระหว่างจุด A และ B ตามแกนคาน

$$\int_A^B dM = \int_A^B V dx \tag{ข}$$

อินทิกรัลด้านซ้ายของสมการจะมีค่าเท่ากับความแตกต่างของโมเมนต์ดัดที่จุด B และ A ความหมายของอินทิกรัลทางด้านขวาของสมการ พิจารณา V เป็นฟังก์ชันของ x และมองเป็นการเปลี่ยนแปลง แผนภาพแรงเฉือนเทียบกับ x ซึ่งแสดงด้วยพื้นที่ใต้แผนภาพแรงเฉือนระหว่างจุด A และ B สมการ (ข) สามารถ แสดงได้เป็น

$$M_B - M_A = \int_A^B V dx$$

$$= (\text{พื้นที่ของแผนภาพแรงเฉือนระหว่างจุด } A \text{ และ } B) \tag{5.7}$$

สมการนี้ยอมรับได้แม้ว่าภาระแบบจุดมากระทำกับคานระหว่างจุด A และ B สมการนี้จะใช้ไม่ได้ถ้ามีโมเมนต์มากระทำระหว่างจุด A และ B โมเมนต์ภายนอกทำให้เกิดการเปลี่ยนแปลงของโมเมนต์ดัดอย่างทันที และด้านซ้ายของสมการ (ข) ไม่สามารถอินทิเกรตข้ามความไม่ต่อเนื่องได้

ภาระกระทำเป็นจุด (Concentrated Loads)

พิจารณาภาระกระทำเป็นจุดคือ P ที่กระทำกับเอลิเมนต์ของคาน (รูปที่ 5.10ข) จากสมการสมดุลของแรงในแนวตั้งจะได้

$$\overset{+}{\uparrow}\sum F_y = 0;$$

$$V - P - (V + V_1) = 0$$

หรือ

$$V_1 = -P \tag{5.8}$$

ผลลัพธ์นี้หมายความว่า การเปลี่ยนแปลงแบบทันทีทันใดของแรงเฉือนเกิดขึ้นที่จุดใด ๆ เมื่อมีภาระแบบจุดกระทำ ดังนั้นเราจะผ่านจากซ้ายไปขวาโดยผ่านจุดที่ภาระกระทำ แรงเฉือนจะลดลงเป็นจำนวนเท่ากับขนาดของภาระที่กระทำลงเท่ากับ P

พิจารณาการสมดุลของโมเมนต์รอบผิวหน้าด้านซ้ายของเอลิเมนต์ (รูปที่ 5.10ข) จะได้

$$-M - P\left(\frac{dx}{2}\right) - (V + V_1)dx + M + M_1 = 0$$

หรือ

$$M_1 = P\left(\frac{dx}{2}\right) + Vdx + V_1 dx$$

ซึ่งความยาว dx ของเอลิเมนต์มีค่าน้อยมาก จากสมการพบว่าส่วนเพิ่ม M_1 ของโมเมนต์ดัดมีค่าน้อยมาก ดังนั้นโมเมนต์ดัดจะไม่มีการเปลี่ยนแปลงเมื่อตัดผ่านจุดที่ภาระกระทำ

แม้ว่าโมเมนต์ดัด M จะไม่เปลี่ยนแปลงอย่างทันทีทันใด อัตราการเปลี่ยนแปลง (dM/dx) ภายใต้การเปลี่ยนแปลงอย่างทันทีทันใด ทางด้านซ้ายของเอลิเมนต์ (รูปที่ 5.10ข) อัตราการเปลี่ยนแปลงของโมเมนต์ดัดคือ $dM/dx = V$ ทางด้านขวาอัตราการเปลี่ยนแปลงคือ $dM/dx = V + V_1 = V - P$

ดังนั้นจุดที่ภาระ P กระทำ อัตราการเปลี่ยนแปลง dM/dx ของโมเมนต์ดัดลดลงอย่างทันทีทันใดเป็นจำนวนเท่ากับ P

ภาระที่กระทำในรูปของโมเมนต์ (Loads in the Form of Couples)

พิจารณากรณีสุดท้ายที่ภาระกระทำอยู่ในรูปของโมเมนต์ M_O (รูปที่ 5.10ค) จากสมการสมดุลของเอลิเมนต์ในทิศทางแนวตั้งจะได้ $V_1 = 0$ ซึ่งแสดงว่าแรงเฉือนไม่เปลี่ยนแปลงตรงจุดที่โมเมนต์กระทำ

การสมดุลของโมเมนต์รอบผิวหน้าด้านซ้ายของเอลิเมนต์

$$-M + M_0 - (V + V_1)dx + M + M_1 = 0$$

ตัดพจน์ที่อยู่ในรูปอนุพันธ์ทิ้งเนื่องจากมีค่าน้อยมาก จะได้

$$M_1 = -M_0 \tag{5.9}$$

สมการนี้แสดงให้เห็นว่าโมเมนต์ดัดลดลง M_O เราจะย้ายจากซ้ายไปขวาผ่านจุดที่ภาระกระทำ ดังนั้น **โมเมนต์ดัดเปลี่ยนแปลงอย่างทันทีทันใดตรงจุดที่โมเมนต์กระทำ**

5.5 แผนภาพของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัด (Shear Force and Bending-Moment Diagrams)

เมื่อมีการออกแบบคานเราจำเป็นต้องรู้แรงเฉือนและโมเมนต์ดัดที่กระทำตลอดความยาวคาน ซึ่งเมื่อนำไปวาดกราฟจะให้ค่าสูงสุดและต่ำสุด กราฟที่ได้เรียกว่า **แผนภาพของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัด**

ภาระกระทำเป็นจุด (Concentrated Loads)

คานอย่างง่าย AB รองรับภาระที่กระทำแบบจุด P ดังรูปที่ 5.11(ก) ภาระ P กระทำที่ระยะ a ห่างจากจุดรองรับ A และระยะ b ห่างจากจุดรองรับ B หาแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับจากสภาวะสมดุลจะได้

$$R_A = \frac{Pb}{L} \tag{5.10ก}$$

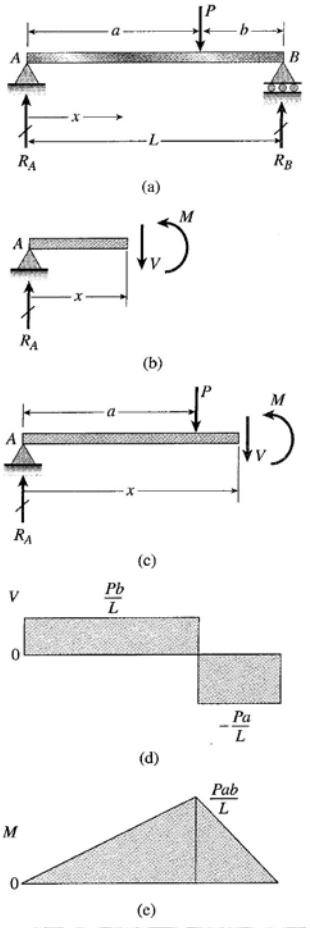
$$R_B = \frac{Pa}{L} \tag{5.10ข}$$

พิจารณาตัดคานทางด้านซ้ายของภาระ P ที่ระยะ x จากจุดรองรับ A แล้ววาดรูปอิสระของชิ้นส่วนคานทางด้านซ้ายดังรูปที่ 5.11(ข) จากสมการความสมดุลสำหรับรูปอิสระจะได้แรงเฉือน V และโมเมนต์ดัด M ที่ระยะ x จากจุดรองรับ

$$V = R_A = \frac{Pb}{L} \tag{5.11ก}$$

$$M = R_A x = \frac{Pbx}{L} \quad (0 < x < a) \tag{5.11ข}$$

สมการ (5.11ก)และ (5.11ข) จะใช้ได้กับส่วนของคานด้านซ้ายของภาระ P ที่กระทำเท่านั้น



รูปที่ 5.11 แผนภาพแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดสำหรับคานที่มีภาระแบบจุดกระทำ

พิจารณาตัดคานทางด้านขวาของภาระ P (นั้นคือ $a < x < L$) แล้ววาดรูปอิสระของคานทางด้านซ้าย (รูปที่ 5.11ค) จากสมการความสมดุลของรูปอิสระจะได้แรงเฉือนและโมเมนต์ดัดคือ

$$V = R_A - P = \frac{Pb}{L} - P = -\frac{Pa}{L} \qquad (a < x < L) \tag{5.12ก}$$

$$M = R_A x - P(x-a) = \frac{Pbx}{L} - P(x-a)$$

$$= \frac{Pa}{L}(L-x) \qquad (a < x < L) \tag{5.12ข}$$

สมการเหล่านี้ใช้ได้กับคานที่ถูกตัดทางด้านขวาของภาระ P เท่านั้น

สมการแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดถูกนำมาวาดทางด้านล่างของคาน รูปที่ 5.11(ง) เป็นแผนภาพแรงเฉือน รูปที่ 5.11(จ) เป็นแผนภาพโมเมนต์ดัด

แผนภาพแรงเฉือนจะพบว่าแรงเฉือนที่ปลาย A ของคาน $(x=0)$ มีค่าเท่ากับแรงปฏิกิริยา R_A แล้วมีค่าคงตัวตลอดไปจนถึงจุดที่ภาระ P กระทำ $(x=a)$ ที่จุดนั้นแรงเฉือนจะลดลงอย่างทันทีทันใดโดยมีขนาดเท่ากับภาระ P แรงเฉือนทางด้านขวาของภาระ P จะมีค่าคงตัวอีก แต่มีขนาดเท่ากับแรงปฏิกิริยา R_B

แผนภาพของโมเมนต์ดัดทางด้านซ้ายของคานจะเพิ่มขึ้นอย่างเป็นเส้นตรงจากศูนย์ที่จุดรองรับ จนกระทั่งมีค่า Pab/L ตรงจุดที่ภาระ P กระทำ $(x=a)$ ด้านขวาของคานโมเมนต์ดัดจะเป็นฟังก์ชันเชิงเส้นตรงของ x ซึ่งแปรเปลี่ยนจาก Pab/L ที่ $x=a$ ไปเป็นศูนย์ที่จุดรองรับ $(x=L)$ ดังนั้นโมเมนต์ดัดสูงสุดคือ

$$M_{max}=\frac{Pab}{L} \tag{4-13}$$

และเกิดขึ้นตรงตำแหน่งที่ภาระ P กระทำ

คุณลักษณะของแผนภาพแรงเฉือนและโมเมนต์ดัด (รูปที่ 5.11ง และ จ) จะพบว่า dV/dx ของแผนภาพแรงเฉือนมีค่าเป็นศูนย์ในช่วง $0<x<a$ และ $a<x<L$ ซึ่งเป็นไปตามสมการ $dV/dx=-q$ (สมการ 5.4) ในทำนองเดียวกันความชัน dM/dx ของแผนภาพโมเมนต์ดัดจะเท่ากับ V (สมการ 5.6) ตรงจุดที่ภาระ P กระทำจะมีการเปลี่ยนแปลงอย่างทันทีทันใดในแผนภาพของแรงเฉือน (เท่ากับขนาดภาระ P)

พิจารณาพื้นที่ของแผนภาพแรงเฉือนจาก $x=0$ ถึง $x=a$ พื้นที่ของแรงเฉือนจะเป็น $(Pb/L)a$ หรือ Pab/L เป็นปริมาณที่แสดงถึงการเพิ่มขึ้นของดโมเมนต์ดัดของจุดสองจุดตรงตำแหน่งเดียวกัน (ดูสมการ 5.7) $x=a$ ถึง $x=L$ พื้นที่ของแผนภาพแรงเฉือนคือ $-Pab/L$ ซึ่งหมายความว่าในย่านนี้โมเมนต์ดัดจะลดลงเป็นจำนวนเท่านี้ อย่างไรก็ตามโมเมนต์ดัดจะเป็นศูนย์ที่จุด B ของคาน

ถ้าโมเมนต์ดัดที่ปลายทั้งสองข้างเป็นศูนย์ดังเช่น คานอย่างง่าย พื้นที่แผนภาพของแรงเฉือนระหว่างปลายทั้งสองของคานจำเป็นต้องเท่ากับศูนย์ โดยที่ไม่มีภาระประเภทโมเมนต์กระทำต่อคาน

ค่าสูงสุดและต่ำสุดของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดจำเป็นต้องนำไปออกแบบคาน สำหรับคานรองรับอย่างง่ายที่ภาระแบบจุดกระทำเพียงตัวเดียว ความเค้นเฉือนสูงสุดจะเกิดขึ้นที่ปลายของคานใกล้จุดที่ภาระแบบจุดกระทำและโมเมนต์ดัดสูงสุดจะเกิดขึ้นตรงตำแหน่งเดียวกัน

ภาระแบบสม่ำเสมอ (Uniform Loads)

คานอย่างง่ายที่มีภาระกระจายแบบสม่ำเสมอด้วยความเข้ม q ดังรูปที่ 5.12 เราจะรู้ว่าแรงปฏิกิริยาที่จุดรองรับ R_A และ R_B จะเท่ากับ $qL/2$ ดังนั้นแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดที่ระยะ x จากปลายด้านซ้าย จะเป็น

$$V=R_A-qx=\frac{qL}{2}-qx \tag{5.14ก}$$

$$M=R_Ax-qx\left(\frac{x}{2}\right)=\frac{qLx}{2}-\frac{qx^2}{2} \tag{5.14ข}$$

สมการเหล่านี้ใช้ได้ตลอดความยาวคาน เมื่อนำไปวาดจะได้แผนภาพของแรงเฉือนและแผนภาพของโมเมนต์ดัดดังรูปที่ 5.12(ข) และ 5.12(ค)

แผนภาพของแรงเฉือนจะประกอบด้วยเส้นตรงที่เอียงมีพิกัดที่ $x=0$ และ $x=L$ โดยความสูงของความเอียงมีค่าเท่ากับแรงปฏิกิริยา ความชันของเส้นเป็น $-q$ ดังที่ได้จากสมการ (5.4) แผนภาพของโมเมนต์ดัดเป็นรูปพาราโบลาที่มีความสมมาตรทางด้านซ้ายแลขวาของจุดกึ่งกลางคาน ที่หน้าตัดใด ๆ ความชันของแผนภาพโมเมนต์ดัดจะมีค่าเท่ากับแรงเฉือน

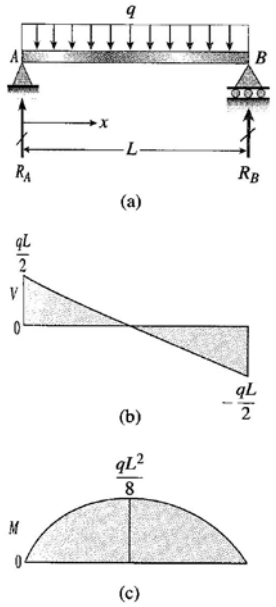
$$\frac{dM}{dx}=\frac{d}{dx}\left(\frac{qLx}{2}-\frac{qx^2}{2}\right)=\frac{qL}{2}-qx=V$$

โมเมนต์ดัดสูงสุดเกิดขึ้นที่จุดกึ่งกลางของคาน ดังนั้นเราแทนค่า $x=L/2$ ลงในนิพจน์ของ M จะได้

$$M_{max}=\frac{qL^2}{8} \tag{5.15}$$

แผนภาพของความเข้มของภาระทีกระทำดังรูปที่ 5.12(ก) จะมีพื้นที่ qL และเป็นไปตามสมการ (5.5) แรงเฉือน V จะลดลงจาก A ไป B โดยลดลงจาก $qL/2$ ถึง $-qL/2$

พื้นที่ของแผนภาพแรงเฉือนระหว่าง $x=0$ ถึง $x=L/2$ เป็น $qL^2/8$ และจะเห็นว่าพื้นที่แสดงด้วยการเพิ่มขึ้นของโมเมนต์ดัดระหว่างจุดสองจุดที่ตำแหน่งเดียวกัน (สมการ 5.7) ในทำนองเดียวกันโมเมนต์ดัดจะลดลงจาก $qL^2/8$ ที่ $x=L/2$ ถึง $x=L$



รูปที่ 5.12 แผนภาพแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดสำหรับคานที่มีภาระกระจายสม่ำเสมอตลอดความยาวคานอย่างง่าย

ภาระแบบจุดหลายตัว (Several Concentrated Loads)

ถ้ามีภาระแบบจุดหลายตัวกระทำกับคานอย่างง่าย (รูปที่ 5.15ก) นิพจน์สำหรับแรงเฉือนและโมเมนต์อาจหาได้โดยตัดคานออกเป็นแต่ละส่วนระหว่างภาระแบบจุดที่กระทำ วาดแผนภาพ รูปอิสระทางด้านซ้ายของคานและวัดระยะ x จากปลาย A เราจะได้สมการส่วนแรกของคานดังนี้

$0<x<a_1$

$$V=R_A \tag{5.16ก}$$

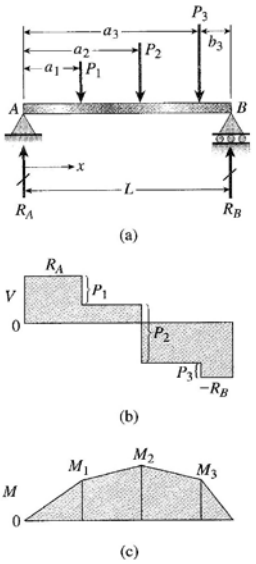
$$M=R_Ax \tag{5.16ข}$$

สำหรับส่วนที่สอง

$a_1<x<a_2$

$$V=R_A-P_1 \tag{5.17ก}$$

$$M=R_Ax-P_1(x-a_1) \tag{5.17ข}$$



รูปที่ 5.13 แผนภาพแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดสำหรับคานอย่างง่าย
ที่มีภาระแบบจุดหลายตัวมากระทำ

สำหรับส่วนที่สามของคานอาจะพิจารณาจากปลายด้านขวาของคานมากกว่าพิจารณาจากปลายด้านซ้าย เพราะภาระที่กระทำกับคานด้านขวาจะมีน้อยกว่า จะได้

$a_2 < x < a_3$

$$V = -R_B + P_3 \tag{5.18ก}$$

$$M = R_B(L-x) - P_3(L-b_3-x) \tag{5.18ข}$$

สุดท้ายส่วนที่สี่ของคาน จะได้

$a_3 < x < L$

$$V = -R_B \tag{4.19ก}$$

$$M = R_B(L-x) \tag{4.19ข}$$

สมการ (5.16) ถึง (5.19) สามารถสร้างแผนภาพของแรงเฉือนและโมเมนต์ดัด (รูปที่ 5.13ข และ 5.13ค)

จากแผนภาพของความเค้นเฉือน เรารู้ว่าแรงเฉือนคงตัวในแต่ละส่วนของคานและเปลี่ยนแปลงอย่างทันทีทันใดทุก ๆ จุดที่ภาระกระทำด้วยขนาดที่เท่ากับภาระที่กระทำ ส่วนโมเมนต์ดัดในแต่ละส่วนของคานจะเป็นฟังก์ชันของ x และแผนภาพของโมเมนต์ดัดจะเป็นเส้นตรง โมเมนต์ดัดภายใต้ภาระแบบจุดที่กระทำสามารถหาได้โดยแทนค่า $x = a_1, x = a_2$ และ $x = a_3$ ลงในสมการ (5.16ข) (5.17ข) และ (5.18ข) จะได้

$$M_1 = R_A a_1 \tag{5.20ก}$$

$$M_2 = R_A a_2 - P_1(a_2 - a_1) \tag{5.20ข}$$

$$M_3 = R_B b_3 \tag{5.20ค}$$

เราสามารถสร้างแผนภาพของโมเมนต์ดัดได้ด้วยการลากเส้นตรงเชื่อมแต่ละจุด

แผนภาพแรงเฉือนในแต่ละจุดที่มีความไม่ต่อเนื่องจะมีการเปลี่ยนแปลงของความชัน $\frac{dM}{dx}$ ของแผนภาพของโมเมนต์ดัด ดังนั้นการเปลี่ยนแปลงของโมเมนต์ดัดระหว่างภาระที่กระทำแต่ละตัวจะมีค่าเท่ากับพื้นที่ของแผนภาพแรงเฉือนระหว่างภาระตัวเดียวกันที่กระทำ ตัวอย่างเช่น การเปลี่ยนแปลงของโมเมนต์ดัดระหว่างภาระ P_1 และ P_2 คือ $M_2 - M_1$ แทนค่าลงในสมการ (4-20ก)จะได้

$$M_2 - M_1 = (P_2 - P_1)(a_2 - a_1)$$

ซึ่งจะเป็นพื้นที่สี่เหลี่ยมผืนผ้าของแผนภาพแรงเฉือนระหว่าง $x = a_1$ และ $x = a_2$

โมเมนต์ดัดสูงสุดจะต้องเกิดที่จุดใดจุดหนึ่งที่ภาระกระทำหรือที่จุดรองรับแรงปฏิกิริยา ความชันของแผนภาพโมเมนต์ดัดจะมีค่าเท่ากับแรงเฉือน ดังนั้นโมเมนต์ดัดจะมีค่าสูงสุดหรือต่ำสุด อนุพันธ์ของ dM / dx จะมีการเปลี่ยนแปลงของเครื่องหมาย

การเปลี่ยนแรงเฉือนจากบวกไปเป็นลบ (ดังรูปที่ 5.13ข) ความชันของแผนภาพโมเมนต์ดัดก็จะเปลี่ยนจากบวกเป็นลบด้วย ดังนั้นจะได้ค่าโมเมนต์ดัดสูงสุดที่หน้าตัดนี้ ในทางกลับกันการเปลี่ยนแรงเฉือนจากลบเป็นบวกแสดงโมเมนต์ดัดที่มีค่าน้อยที่สุด

แผนภาพแรงเฉือนและโมเมนต์ดัด

พิจารณาตัดคานที่ระยะ x ใด ๆ จากปลายอิสระ วาดแผนภาพรูปอิสระของคานด้านซ้าย แล้วใช้สมการสมดุลของแรงและโมเมนต์เพื่อหาแรงเฉือน V และโมเมนต์ดัด M โดยวัดระยะจากปลายด้านซ้ายของคาน จะได้

$$V = -qx \tag{5.29ก}$$

$$M = -\frac{qx^2}{2} \tag{5.29ข}$$

แผนภาพแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดสามารถวาดได้จากสมการเหล่านี้ ความชันของแผนภาพแรงเฉือนมีค่าเท่ากับ $-q$ (สมการ 5.4) และความชันของแผนภาพโมเมนต์ดัดมีค่าเท่ากับ V (สมการ 5.6)

ค่าแรงเฉือนและโมเมนต์ดัดสูงสุดเกิดขึ้นที่จุดรองรับเมื่อ $x = L$

$$V_{max} = -qL \tag{5.30ก}$$

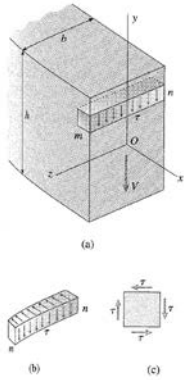
$$M_{max} = -\frac{qL^2}{2} \tag{5.30ข}$$

5.8 **ความเค้นเฉือนในคานรูปสี่เหลี่ยม** (Shear Stresses in Beams of Rectangular Cross Section)

เมื่อคานอยู่ภายใต้การดัดเพียงอย่างเดียว ผลจะทำให้เกิดความเค้นตั้งฉากกับพื้นที่หน้าตัดเท่านั้น แต่คานส่วนใหญ่เมื่อมีภาระหรือแรงมากระทำจะทำให้เกิดทั้งความเค้นตั้งฉากและ ความเค้นเฉือน

พิจารณาคานหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้ากว้าง b สูง h มีแรงเฉือน V ที่มีค่าเป็นบวกกระทำ ดังรูปที่ 5-26a สมมุติความเค้นเฉือนกระทำบนพื้นที่หน้าตัดที่ขนานกับแรงเฉือน โดยสมมุติความเค้นเฉือนที่เกิดขึ้นมีการกระจายสม่ำเสมอตลอดหน้าตัดคาน

ถ้าดึงเอลิเมนต์เล็ก ๆ mn ของคานออกมาพิจารณา ดังรูปที่ 5-26a โดยตัด 2 ระนาบตามแนวนอน จากสมมุติฐานที่ว่าความเค้นเฉือนที่กระทำบนผิวหน้าในแนวดิ่งของเอลิเมนต์และมีการกระจายตัวสม่ำเสมอเราจะพบว่าจะเกิดความเค้นเฉือนบนผิวอีกด้านหนึ่งของเอลิเมนต์ที่มีขนาดเท่ากันแต่กระทำบนผิวหน้าที่ตั้งฉากกันของเอลิเมนต์ ดังรูปที่ 5-26 b และ c ดังนั้นถ้ามีความเค้นเฉือนบนระนาบตามแนวนอนก็จะเกิดความเค้นเฉือนที่มีขนาดเท่ากันกระทำในแนวดิ่ง



รูปที่ 5-26 ความเค้นเฉือนในคานของคานรูปหน้าตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้า

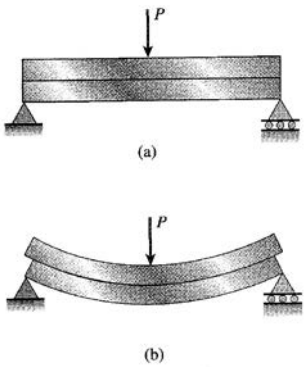
ถ้าจิตนาการว่าเอลิเมนต์ mn ถูกวางอยู่ส่วนบนสุดหรือล่างสุดของคาน เราจะเห็นว่าความเค้นเฉือนในแนวระนาบจะเป็นศูนย์ เพราะไม่มีความเค้นเฉือนเกิดขึ้นที่ผิวด้านนอกของคาน ความเค้นเฉือนในแนวดิ่งที่ตำแหน่งเหล่านี้ก็จะเป็นศูนย์นั้น คือ $\tau = 0$ เมื่อ $y = \pm\ h/2$

ความเค้นเฉือนในคานสามารถอธิบายได้ง่าย ๆ จากแผ่นกระดานสองแผ่นที่มีขนาดเท่ากันและวางซ้อนกัน โดยมีแรง P กระทำ ดังรูปที่ 5-27(ก) ผลทำให้กระดานทั้งสองแผ่นเกิดการดัด บริเวณผิวหน้าของแผ่นกระดานจะเกิดการเลื่อน ดังรูปที่ 5-27(ข)

สมมุติว่าคานทั้งสองถูกยึดเข้าด้วยกันเหมือนคานอันเดียว เมื่อคานนี้มีภาระหรือแรงกระทำจะทำให้คานเกิดการดัด และเกิดความเค้นเฉือนในแนวระนาบตามแนวยึดของคานอันบนกับคาน อันล่าง เพื่อป้องกันการเลื่อนของคาน คานจะมีความแข็งแกร่งและแข็งแรงมากกว่าคานแยกสองอัน

การเปลี่ยนแปลงสูตรแรงเฉือน (Derivation of shear Formula)

คานที่อยู่ภายใต้ภาระที่กระทำไม่สม่ำเสมอ ดังรูปที่ 5-28 (ก) เราตัดคานออกเป็นสองหน้าตัด ที่มีระยะห่างกัน dx แล้วแยกเอาเอลิเมนต์ mnm_1n_1 ออกมาพิจารณา คือ mn และ m_1n_1 โดยที่หน้าตัด mn มีแรงเฉือน V และโมเมนต์ดัง M_1 กระทำ ส่วนที่หน้าตัด m_1n_1 มีแรงเฉือน $V + dV$ และโมเมนต์ดัด $M + dM$ เอลิเมนต์จะถูกกระทำด้วยความเค้นตั้งฉากและความเค้นเฉือนทั้งสองหน้าตัด ความเค้นตั้งฉากดังรูปที่ 5-28 (ข) จะแปรเปลี่ยนตามระยะจากแกนสะเทินทั้งบนหน้าตัด mn และ m_1n_1 ดังนั้นจะได้



รูปที่ 5.27 การดัดของแผ่นกระดานสองแผ่นที่แยกกัน

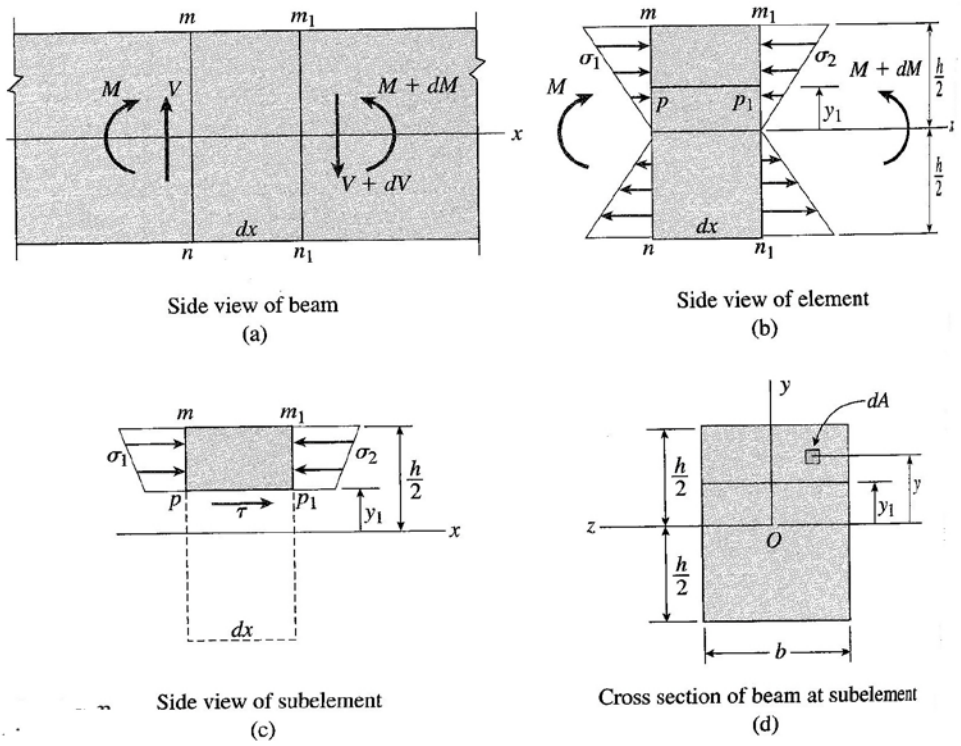
$$\sigma_1 = -\frac{My}{I}$$

$$\sigma_2 = -\frac{(M+dM)y}{I}$$

โดยที่ y เป็นระยะจากแกนสะเทิน และ I เป็นโมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่ตัดรอบแกนสะเทิน

พิจารณาเอลิเมนต์ย่อย mm_1p_1p โดยผ่านระนาบตามแนวนอน pp_1 ซึ่งผ่านเอลิเมนต์ mnm_1n_1 ดังรูปที่ 5-28 (ข) ระนาบ pp_1 อยู่ห่างจากแกนสะเทินเป็นระยะ y_1 เอลิเมนต์ย่อยนี้ถูกแยกออกมาดังรูปที่ 5-28 (ค) ผิวส่วนบนของเอลิเมนต์ย่อยนี้จะไม่มีความเค้นเกิดขึ้น ผิวส่วนล่างของเอลิเมนต์ย่อยจะขนานกับผิวสะเทิน ซึ่งจะมีความเค้นเฉือนๆ ในแนวนอนที่ระดับนี้เกิดขึ้นในเนื้อคาน บนผิวหน้าของหน้าตัด mp และ m_1p_1 จะมีความเค้นดัด σ_1 และ σ_2 กระทำ ซึ่งเกิดจากโมเมนต์ดัด

ถ้าโมเมนต์ดัดที่กระทำกับหน้าตัด mn และ m_1n_1 เท่ากัน ดังรูปที่ 5-28 (ข) แสดงว่าคานอยู่ภายใต้โมเมนต์ดัดเพียงอย่างเดียว ความเค้นตั้งฉาก σ_1 และ σ_2 ที่กระทำบนหน้าตัด mn และ m_1n_1 ของเอลิเมนต์ย่อยจะเท่ากัน ดังนั้นเอลิเมนต์ย่อยจะอยู่ในสภาวะสมดุลภายใต้ความเค้นตั้งฉากเพียงอย่างเดียว และความเค้นเฉือน τ ที่กระทำบนผิวหน้าด้านล่าง pp_1 จะกลายเป็นศูนย์ สรุปได้ว่าคานที่อยู่ภายใต้โมเมนต์ดัดเพียงอย่างเดียวจะไม่มีแรงเฉือนและความเค้นเฉือนเกิดขึ้น



รูปที่ 5.28 ความเค้นเฉือนในคานรูปหน้าตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้า

ถ้าโมเมนต์เปลี่ยนแปลงตามความยาวคาน (โมเมนต์ดัดไม่สม่ำเสมอ) เราสามารถหาความเค้นเฉือน τ ที่กระทำบนผิวหน้าด้านล่างของเอลิเมนต์ย่อย ดังรูปที่ 5-28 (ค) โดยพิจารณาสภาวะสมดุลของเอลิเมนต์ย่อยในทิศทางแกน x

เรากำหนดเอลิเมนต์ของพื้นที่ dA บนหน้าตัดที่ระยะ y จากแกนสะเทิน ดังรูปที่ 5-28 (ง) แรงที่กระทำบนเอลิเมนต์นี้ คือ $\sigma\ dA$ ซึ่ง σ คือความเค้นตั้งฉากที่หาได้จากสูตรการโก่ง ถ้าเอลิเมนต์ของพื้นที่อยู่บนผิวหน้าตัดด้านซ้าย mp ของเอลิเมนต์ย่อย ดังนั้นแรงที่กระทำบนเอลิเมนต์ คือ

$$\sigma_1 dA = \left| -\frac{My}{I} \right| dA = \frac{My}{I} dA$$

เราใช้ค่าสัมบูรณ์ในสมการนี้ เนื่องจากทิศทางของความเค้นมีหลายทิศทาง ผลรวมของแรงที่กระทำบนพื้นที่ผิว mp ของเอลิเมนต์ย่อย กำหนดด้วยแรงรวมตามแนวนอน F_1 ที่กระทำบนผิวหน้านี้

$$F_1 = \int \sigma_1 dA = \int \frac{My}{I} dA$$

(ค)

การอินทิเกรตบนพื้นที่ส่วนที่แรงเงาของหน้าตัดแสดงดังรูปที่ 5-28 (ค) จาก $y = y_1$ ถึง $y = h/2$ แรง F_1 แสดงดังรูปที่ 5-29 บนแผนภาพรูปอิสระของเอลิเมนต์ย่อย

ในทำนองเดียวกันแรงรวม F_2 บนผิวหน้าด้านขวา $m_1 p_1$ ของเอลิเมนต์ย่อย ดังรูปที่ 5-29 คือ

$$F_2 = \int \sigma_2 dA = \int \frac{(M + dM)y}{I} dA$$

(ง)

เมื่อรู้แรง F_1 และ F_2 เราสามารถหาแรง F_3 ที่กระทำบนผิวหน้าด้านล่างของเอลิเมนต์ย่อยซึ่งเอลิเมนต์ย่อยอยู่ในสภาวะสมดุล เราสามารถหาผลรวมของแรงในทิศทางแกน x และหาได้จาก

$$F_3 = F_2 - F_1$$

หรือ

$$F_3 = \int \frac{(M + dM)y}{I} dA - \int \frac{My}{I} dA = \int \frac{dM}{I} dA$$

ปริมาณ dM และ I เป็นค่าคงตัวสามารถเอาออกมานอกเครื่องอินทิเกรตได้ ดังนั้นแรง F_3 จะกลายเป็น

$$F_3 = \frac{dM}{I} \int y dA \qquad (5\text{-}33)$$

ถ้าความเค้นเฉือน τ กระจายสม่ำเสมอตลอดความกว้าง b ของคาน แรง F_3 จะมีค่าเท่ากับ

$$F_3 = \tau b\ dx \qquad (5\text{-}34)$$

ซึ่ง bdx เป็นพื้นที่ผิวด้านล่างของเอลิเมนต์ย่อย

รวมสมการ (5-33) และ (5-34) เพื่อแก้สมการหาค่าความเค้นเฉือน τ จะได้

$$\tau = \frac{dM}{dx} \left(\frac{1}{Ib} \right) \int y dA \qquad (5\text{-}35)$$

ปริมาณ dM/dx มีค่าเท่ากับแรงเฉือน V ดังนั้นจะกลายเป็น

$$\tau = \frac{V}{Ib} \int y dA \qquad (5\text{-}36)$$

อินทิกรัลในสมการนี้ประเมินเหนือพื้นที่ส่วนแรเงาของหน้าตัด โดยเป็นโมเมนต์อันดับหนึ่งของพื้นที่หน้าตัดส่วนที่แรเงาเทียบกับแกนสะเทินหรือในอีกความหมายหนึ่ง อินทิกรัลเป็นโมเมนต์อันดับหนึ่งของพื้นที่หน้าตัดเหนือระดับที่ต้องการหาความเค้นเฉือน τ โมเมนต์อันดับหนึ่งแสดงด้วยสัญลักษณ์ Q

$$Q = \int y dA$$

(5-37)

สมการความเค้นเฉือนจะกลายเป็น

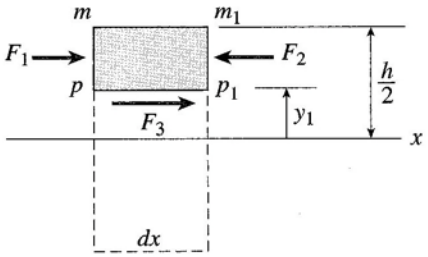
$$\tau = \frac{VQ}{Ib}$$

(5-38)

สมการนี้ใช้หาความเค้นเฉือน τ ที่ตำแหน่งใด ๆ บนพื้นที่หน้าตัดของคานรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า แรงเฉือน V โมเมนต์ความเฉือน I และความกว้าง b เป็นค่าคงตัว

การคำนวณโมเมนต์อันดับหนึ่ง (Calculation of the First Moment)

การคำนวณหาความเค้นเฉือนเหนือแกนสะเทิน ดังรูปที่ 5-28 (ง) การคำนวณหา Q จะใช้พื้นที่ส่วนที่แรเงาเหนือแกน อย่างไรก็ตามเราสามารถคำนวณหาโมเมนต์อันดับหนึ่ง Q ได้จากพื้นที่ส่วนล่างของพื้นที่ส่วนที่แรเงา ซึ่งจะมีขนาดเท่ากันแต่เครื่องหมายเป็นลบ โมเมนต์อันดับหนึ่งของพื้นที่หน้าตัดทั้งหมดจะเป็นศูนย์ เนื่องจากแกนสะเทินผ่านจุดศูนย์ถ่วงของหน้าตัด ดังนั้นค่าของ Q สำหรับพื้นที่อยู่ข้างล่างของระยะ y_1 จะเป็นค่าลบของ Q สำหรับพื้นที่อยู่เหนือระยะ y_1 เพื่อความสะดวกเราจะใช้พื้นที่เหนือระยะ y_1 เมื่อต้องการหาความเค้นเฉือนที่อยู่ส่วนบนของคาน และใช้พื้นที่ส่วนที่อยู่ข้างล่างของระยะ y_1 เมื่อจุดที่ต้องการหาอยู่ส่วนล่างของคาน



รูปที่ 5.29 แผนภาพรูปอิสระของเอลิเมนต์ย่อยแสดงแรงทั้งหมดในแนวนอน

อย่างไรก็ตามเราจะใช้ค่าสัมบูรณ์สำหรับ V และ Q เพื่อให้สูตรความเค้นเฉือนเป็นค่าบวก ส่วนทิศทางของความเค้นเฉือนได้จากการตรวจสอบ ซึ่งความเค้นจะกระทำในทิศทางเดียวกับแรงเฉือน V

การกระจายของความเค้นเฉือนในคานหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า
(Distribution of Shear Stresses in a Rectangular Beam)

การกระจายตัวของความเค้นเฉือนบนหน้าตัดคานรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า ดังรูปที่ 5-30 (ก) โมเมนต์อันดับหนึ่ง Q ของพื้นที่ส่วนที่แรเงาหาได้จากพื้นที่ของตัวเองคูณด้วยระยะจากจุดศูนย์ของพื้นที่ส่วนที่จะหาไปยังแกนสะเทิน

$$Q = b\left(\frac{h}{2} - y_1\right)\left(y_1 + \frac{h/2 - y_1}{2}\right) = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y_1^2\right)$$

(f)

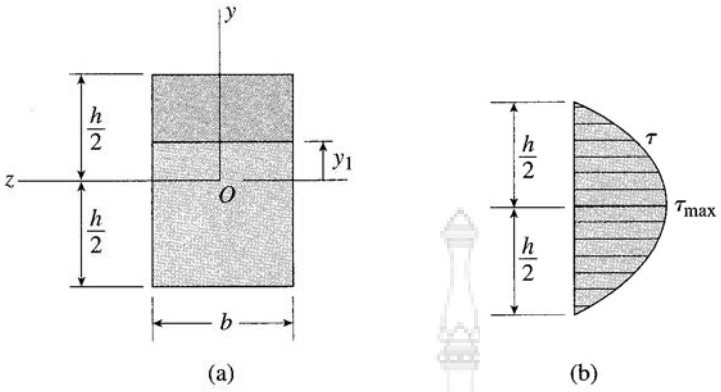
หรือหาได้จากการอินทิเกรตโดยใช้สมการ (5-37)

$$Q = \int y\,dA = \int_{y_1}^{h/2} yb\,dy = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y_1^2\right)$$

(g)

แทนค่านิพจน์ของ Q ลงในสมการ (5-38) จะได้

$$\tau = \frac{V}{2I}\left(\frac{h^2}{4} - y_1^2\right)$$



รูปที่ 5.30 การกระจายของความเค้นเฉือนในคานรูปหน้าตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้า

(ก) พื้นที่หน้าตัดของคาน

(ข) แผนภาพแสดงการกระจายตัวของความเค้นเฉือนที่เป็นรูปพาราโบลา

สมการนี้แสดงให้ว่าความเค้นเฉือนในคานหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า จะแปรเปลี่ยนตามกำลังสองของระยะ y_1 จากแกนสะเทิน ดังนั้นเมื่อนำมาวาดตามความสูงของคาน ความเค้นเฉือนจะแปรเปลี่ยนดังรูปที่ 5-30 (ข) นั้นคือ ความเค้นเฉือนมีค่าเป็นศูนย์ เมื่อ $y_1 = \pm\ h/2$

ความเค้นเฉือนสูงสุดเกิดขึ้นที่แกนสะเทิน $(y_1 = 0)$ เมื่อโมเมนต์อันดับหนึ่ง Q มีค่ามากที่สุดแทนค่า $y_1 = 0$ ลงในสมการ (5-39) จะได้

$$\tau_{\max} = \frac{Vh^2}{8I} = \frac{3V}{2A}$$

(5-40)

ซึ่ง $A = bh$ เป็นพื้นที่หน้าตัดของคาน ความเค้นเฉือนสูงสุดในคานหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้าจะเป็น 50% มากกว่าความเค้นเฉือนเฉลี่ย V/A

ข้อจำกัด (Limitation)

สูตรสำหรับหาความเค้นเฉือนนี้ใช้กับคานที่ทำจากวัสดุยืดหยุ่นในช่วงอิลาสติกและมีการโก่ง (deflection) เล็กน้อย

ในกรณีของคานหน้าตัดสี่เหลี่ยมผืนผ้า ความเที่ยงตรงของสูตรจะขึ้นอยู่กับอัตราส่วนความสูงและความกว้างของหน้าตัดความเที่ยงตรงจะมากถ้าคานมีความสูงมากกว่าความกว้าง และคานจะมีความเที่ยงตรงลดลง เมื่อความกว้าง b เพิ่มขึ้นสัมพันธ์กับความสูง

ความผิดพลาดโดยทั่วไปของสูตรหาความเค้นเฉือน คือ ไม่ใช้กับคานหน้าตัดรูปสามเหลี่ยมหรือรูปครึ่งวงกลม เพื่อไม่ให้ใช้สูตรผิดพึงระลึก อยู่เสมอว่าเกี่ยวกับสมมุติฐานว่า (1) ขอบของพื้นที่หน้าตัดคานยังคงขนานกับแกน y (ความเค้นเฉือนขนานกับแกน y) และ (2) ความเค้นเฉือนจะคงตัวสม่ำเสมอตลอดความกว้างพื้นที่หน้าตัด

สูตรความเค้นเฉือนนี้ใช้ได้กับคานที่มีหน้าตัดสมมาตรเท่านั้น ถ้าคานมีหน้าตัดไม่สมมาตรจะต้องหาด้วยวิธีอื่น

บทที่ 6

ความเค้นดัดในคาน

(BENDING STRESSES IN BEAMS)

6.1 บทนำ

ภาระที่กระทำกับคานทำให้คานเกิดการดัดโค้ง (bend) ดังนั้นทำให้แกนของคานเกิดการเปลี่ยนรูปกลายเป็นเส้นโค้ง ตัวอย่างเช่น คานยื่น AB ถูกกระทำด้วยภาระ P ที่ปลายอิสระ (รูปที่ 6.1ก) เดิมแกนของคานที่เป็นเส้นตรงจะถูกดัดให้โค้งดังรูปที่ 6.1(ข) ส่วนโค้งนี้เรียกว่า **ระยะเบนของคาน** (deflection curve of beam)

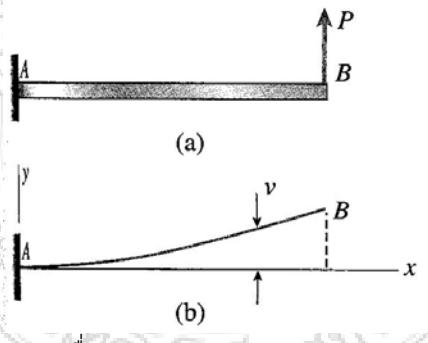
แกนพิกัดที่กำหนดขึ้นโดยวางทาบกับคานตรงส่วนที่ยืดแน่น และกำหนดให้แกน x ไปทางขวาเป็นบวก ส่วนแกน y มีทิศทางเป็นบวกเมื่อชี้ขึ้นเป็นไปตามกฎมือขวา

พิจารณารูปที่ 6.1 คานนี้เกิดการดัดบนระนาบ xy เรียกระนาบ xy นี้ว่า **ระนาบของการดัด** (plane of bending)

ระยะเบนของคาน (deflection of the beam) ที่จุดใด ๆ ตามแนวแกนของคาน เรียกว่า **การกระจัด** (displacement) ของจุดที่เปลี่ยนแปลงไปจากเดิม แทนด้วยสัญลักษณ์ v จากแกน y

6.2 การดัดอย่างเดียวและการดัดไม่สม่ำเสมอ (Pure Bending and Nonuniform Bending)

ในการวิเคราะห์คานจำเป็นจะต้องรู้ความแตกต่างระหว่างการดัดอย่างเดียวกับการดัดที่ไม่สม่ำเสมอ การดัดอย่างเดียวจะเกิดกับคานที่อยู่ภายใต้โมเมนต์ดัดคงตัว นั่นคือ การดัดของคานจะเกิดขึ้นในช่วงที่แรงเฉือนเป็นศูนย์เท่านั้น ส่วนการดัดที่ไม่สม่ำเสมอจะเกิดขึ้นเมื่อมีแรงเฉือน ซึ่งหมายความว่าโมเมนต์ดัดจะเปลี่ยนแปลงไปตามความยาวของคาน



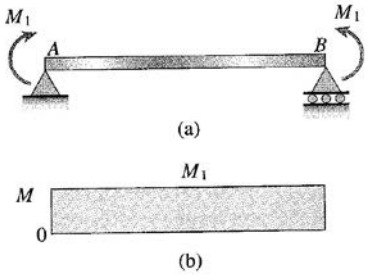
รูปที่ 6.1 การดัดของคานยื่น

(ก) คานที่มีภาระ P กระทำ (ข) การเบนของคาน

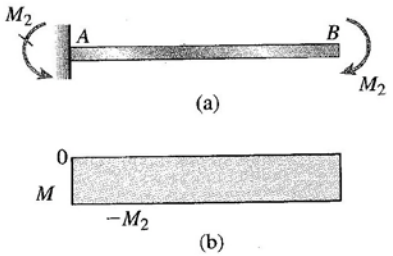
พิจารณาคานที่มีจุดรองรับอย่างง่าย AB มีโมเมนต์ M_1 กระทำที่ปลายทั้งสองข้างที่มีขนาดเท่ากัน แต่ทิศทางตรงกันข้ามดังรูปที่ 6.2 (ก) โมเมนต์ดัดคงตัว $M = M_1$ จะเกิดขึ้นตลอดความยาวคานดังรูปที่ 6.2 (ข) จะเห็นว่าแรงเฉือน V บนคานมีค่าเป็นศูนย์

โมเมนต์ดัดอย่างเดียวที่เกิดกับคานยื่น AB ดังรูปที่ 6.3 (ก) โดยมีโมเมนต์ M_2 ทิศทางตามเข็มนาฬิกากระทำที่ปลายอิสระ B ซึ่งไม่มีแรงเฉือนเกิดขึ้นในคาน โมเมนต์ดัดที่เกิดขึ้นมีค่าเป็นลบ $M = -M_2$ แสดงดังรูปที่ 6.3 (ข)

คานรองรับอย่างง่ายที่อยู่ภายใต้ภาระที่กระทำดังรูปที่ 6.4 (ก) เป็นตัวอย่างของคานที่มีบางส่วนอยู่ในช่วงของโมเมนต์เพียงอย่างเดียวและบางส่วนอยู่ในช่วงของโมเมนต์ดัดไม่สม่ำเสมอแสดงดังแผนภาพแรงเฉือนและโมเมนต์ดัด รูปที่ 6.4 (ข) และ (ค) ช่วงกลางของคานจะเป็นแบบโมเมนต์คงตัว เพราะแรงเฉือนมีค่าเป็นศูนย์ ส่วนคานที่อยู่ใกล้ปลายทั้งสองด้านจะอยู่ภายใต้โมเมนต์ดัดที่ไม่สม่ำเสมอ เพราะ มีแรงเฉือนทำให้โมเมนต์ดัดมีค่าเปลี่ยนแปลง



รูปที่ 6.2 คานที่มีจุดรองรับอย่างง่ายอยู่ภายใต้โมเมนต์ดัดอย่างเดียว $M = M_1$

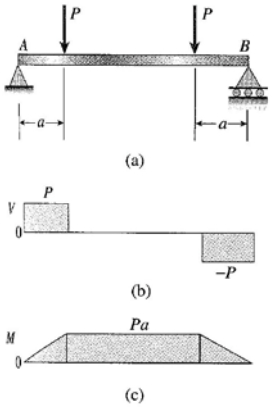


รูปที่ 6.3 คานยื่นที่อยู่ภายใต้โมเมนต์ดัดอย่างเดียว $M = -M_2$

6.3 **ส่วนโค้งของคาน** (Curvature of a Beam)

เมื่อมีภาระมากระทำกับคานทำให้แกนตามแนวยาวของคานเกิดการเปลี่ยนรูปร่างเป็นส่วนโค้ง ดังรูปที่ 6.1

พิจารณาคานยื่นที่มีแรง P กระทำที่ปลายอิสระของคานดังรูปที่ 6.5 (ก) ทำให้คานเกิดส่วนโค้งของระยะเบนดังรูปที่ 6.5 (ข) ในการวิเคราะห์เราจะกำหนดจุด M_1 และ M_2 บนส่วนโค้งของการเบน (deflection curve) จุด M_1 เป็นระยะ x ใด ๆ จากแกน y และจุด M_2 มีเป็นระยะเล็ก ๆ ระยะ ds วัดตามส่วนโค้ง จุดแต่ละจุดเหล่านี้ให้วาดเส้นตั้งฉากกับเส้นสัมผัสของส่วนโค้งนั้นของมันเอง เส้นตั้งฉากเหล่านี้ตัดกันที่จุด O' ซึ่งเป็นจุดศูนย์กลางของความโค้ง (center of curvature) คานส่วนมากจะมีระยะเบนน้อยมากจนเกือบจะแบนราบ จุด O' จะอยู่ห่างออกไปจากคานมากดังแสดงในรูป



รูปที่ 5.4 คานที่มีจุดรองรับอย่างง่ายที่บริเวณส่วนกลางของคานอยู่ภายใต้ความเค้นดัด เพียงอย่างเดียวและส่วนปลายทั้งสองด้านอยู่ภายใต้ความเค้นดัดไม่สม่ำเสมอ

ความยาว m_1O' จากส่วนโค้งไปยังจุดศูนย์กลางความโค้ง เรียกว่า **รัศมีของความโค้ง** (radius of curvature, ρ) ความโค้ง (curvature, κ) กำหนดเป็นส่วนกลับของรัศมีความโค้ง ดังนั้น

$$\kappa = \frac{1}{\rho} \tag{6.1}$$

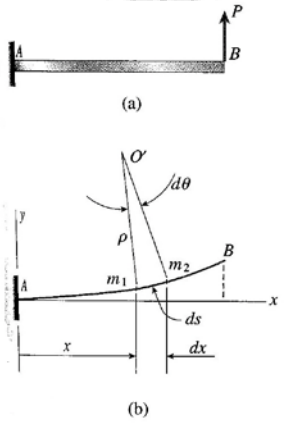
ความโค้ง (curvature) เป็นการวัดว่าคานดัด (bent) ไปเท่าไร ถ้าภาระที่กระทำกับคานมีค่าน้อยคานเกือบจะเป็นเส้นตรง รัศมีความโค้งจะมากและค่าความโค้งจะมีค่าน้อย แต่ถ้าภาระที่กระทำกับคานมากคานจะดัดมาก รัศมีความโค้งจะน้อยค่าความโค้งจะมาก

จากเรขาคณิตของรูปสามเหลี่ยม $O'm_1m_2$ (รูปที่ 6.5 ข) จะได้ว่า

$$\rho d\theta = ds \tag{ก}$$

เมื่อ $d\theta$ เป็นมุมที่เล็กมาก ๆ (วัดเป็นเรเดียน) อยู่ระหว่างเส้นตั้งฉาก m_1 และ m_2 และ ds เป็นระยะน้อยมาก ๆ ตามส่วนโค้งระหว่างจุด m_1 และ m_2 รวมสมการ (ก) เข้ากับสมการ (6.1) จะได้

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{ds} \tag{6.2}$$



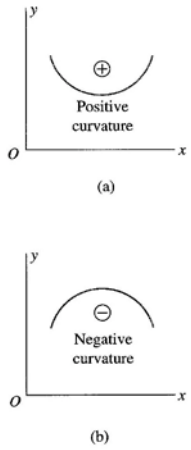
รูปที่ 6.5 ความโค้งของคานที่ดัด
(ก) คานเมื่อมีภาระมากระทำ
(ข) การเบนของคาน

การเบน (deflection) ของคานจะน้อยมากเมื่อเทียบกับความยาวคาน ระยะเบนที่น้อยมากนี้เกือบจะเป็นเส้นตรง ดังนั้นระยะ ds ตามส่วนโค้งอาจจะเท่ากับระยะที่ฉายตามแนวนอน dx ดังรูปที่ 6.5 (ข) สมการสำหรับหาความโค้ง คือ

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{d\theta}{dx} \tag{6.3}$$

ดังนั้นความโค้ง (κ) และรัศมีความโค้ง (ρ) จะขึ้นอยู่กับระยะ dx ที่วัดตามแนวแกน x ตำแหน่ง O' ของจุดศูนย์กลางความโค้งที่ขึ้นอยู่กับระยะ x

ข้อตกลงเรื่องเครื่องหมายของความโค้ง ถ้าแกน x เป็นบวกเมื่อไปทางขวาและแกน y เป็นบวกเมื่อชี้ขึ้นดังรูปที่ 6.6 ความโค้งจะเป็นบวกเมื่อคานมีจุดศูนย์กลางความโค้งอยู่เหนือคาน และความโค้งจะเป็นลบเมื่อจุดศูนย์กลางความโค้งของคานอยู่ใต้คาน

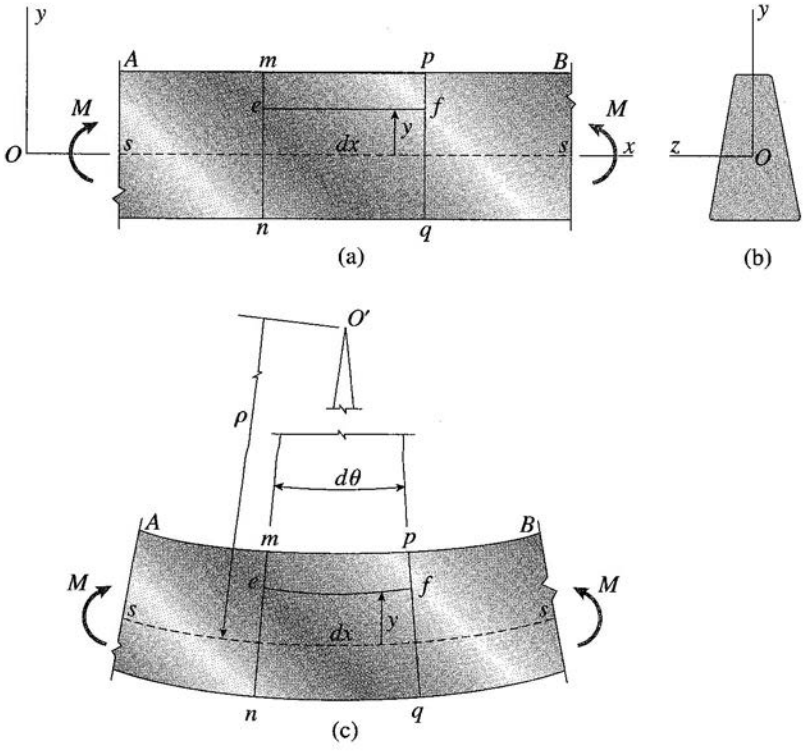


รูปที่ 6.6 ข้อตกลงเรื่องเครื่องหมายสำหรับความโค้ง

6.4 **ความเครียดตามแนวแกนในคาน** (Longitudinal Strains in Beams)

ความเครียดตามแนวแกนของคานสามารถหาได้โดยการวิเคราะห์ ความโค้งของคานและการเปลี่ยนรูปของคาน พิจารณาคานในช่วงความยาว AB ที่อยู่ภายใต้การดัดเพียงอย่างเดียวด้วยโมเมนต์ดัดที่มีค่าเป็นบวก M ดังรูปที่ 6.7(ก) สมมุติว่าคานนี้เดิมเป็นคานตรงตามแนวแกน x และมีหน้าตัดสมมาตรกับแกน y ดังรูปที่ 6.7(ข)

คานนี้เมื่อถูกกระทำด้วยโมเมนต์ดัดทำให้คานเกิดการดัดโค้งในระนาบ xy และแนวแกนของคานถูกดัดทำให้กลายเป็นส่วนโค้งของวงกลม (ส่วนโค้ง ss ดังรูปที่ 6.7 (ค)) คานนี้จะมีจุดศูนย์กลางความโค้งอยู่เหนือคาน ซึ่งจะเป็นความโค้งค่าบวกดังรูปที่ 6.6 (ก)



รูปที่ 6.7 การเปลี่ยนรูปของคาน เมื่ออยู่ภายใต้การดัดเพียงอย่างเดียว

(ก) รูปด้านข้างของคาน

(ข) รูปหน้าตัดของคาน

(ค) คานที่เปลี่ยนรูป

หน้าตัดของคานที่ mn และ pq ดังรูปที่ 6.7(ก) ยังคงเป็นระนาบตั้งฉากกับแกนตามยาว(รูปที่ 6.7 ก) เมื่อคานเกิดการดัดดังรูปที่ 6.7 (ค) หน้าตัด mn และ pq จะเกิดการหมุน เมื่อเทียบกับหน้าตัดอื่น ๆ ที่ตั้งฉากกับแกนตามยาว เส้นตามแนวยาวที่อยู่ส่วนล่างของคานจะเกิดการยืดออก ขณะที่เส้นตามแนวยาวส่วนบนจะหดสั้นลง จะมีเส้นตามแนวยาวของคานที่ซึ่งไม่เกิดการเปลี่ยนแปลง ผิวของเส้นนี้แสดงด้วยเส้นประ ss ดังรูปที่ 6.7(ก) และ (ค) เรียกผิวนี้ว่า **ผิวสะเทิน ของคาน** (neutral surface of beam) แกนที่อยู่ในแนวที่เกิดจากการตัดของผิวสะเทินกับหน้าตัดบนระนาบใด ๆ เรียกว่า **แกนสะเทินของหน้าตัด** (neutral axis of the cross section) ซึ่งแกน z จะเป็นแกนสะเทินดังรูปที่ 6.7(ข)

ระนาบหน้าตัด mn และ pq ในรูปที่ 6.7 (ค) เมื่อลากเส้นตรงให้ผ่านระนาบหน้าตัดทั้งสองนี้ เส้นตรงสองเส้นนี้จะไปตัดกันที่จุด O' ซึ่งเป็นจุดศูนย์กลางของความโค้ง มุมที่อยู่ระหว่างระนาบทั้งสองนี้ คือ มุม $d\theta$ และระยะจากจุด O' ถึงผิวสะเทิน ss เป็นรัศมีของความโค้ง คือ ρ ระยะห่างระหว่างระนาบทั้งสองนี้คือ dx ซึ่งจะไม่เกิดการเปลี่ยนความยาวถ้าเป็นตำแหน่งที่ผิวสะเทินดังรูปที่ 6.7 (ค) จะได้ $\rho d\theta = dx$ อย่างไรก็ตาม แนวแกนที่ตำแหน่งระหว่างระนาบทั้งสองนี้จะมีความสั้นยาวไม่เท่ากัน ทำให้เกิดความเครียดในแนวตั้งฉาก (normal strain, ε_x)

พิจารณาเส้นตรง ef ตามแนวยาวของคานที่อยู่ระหว่างหน้าตัด mn และ pq ดังรูปที่ 6.7 (ก) กำหนดให้เส้นตรง ef อยู่ห่างจากผิวสะเทินเป็นระยะ y โดยให้แกน x ทาบอยู่กับผิวสะเทินของคานตอนที่คานยังไม่เกิดการดัด เมื่อคานเกิดการดัดผิวสะเทินก็จะเคลื่อนที่ตามคานไปด้วย แต่แกน x ยังคงอยู่กับที่ เส้นตรง ef ก็ยังคงอยู่ห่างจากผิวสะเทินเป็นระยะ y เท่าเดิม ดังนั้น ความยาว L_1 ของเส้นตรง ef หลังจากคานเกิดการดัดคือ

$$L_1 = (\rho - y)d\theta = dx - \frac{y}{\rho}dx$$

ซึ่ง

$$d\theta = \frac{dx}{\rho}$$

ความยาวเดิมของ ef คือ dx ซึ่งมันเกิดการหดตัวเป็นระยะ $L_1 - dx$ หรือ $-ydx/\rho$ ความเครียดตามแนวยาวที่เกิดขึ้นมีค่าเท่ากับระยะยืดหรือหดหารด้วยความยาวเดิม dx เรียกว่า **ความสัมพันธ์ของความเครียด-ความโค้ง** (strain – curvature relation)

$$\varepsilon_x = -\frac{y}{\rho} = -\kappa y \qquad (6.4)$$

เมื่อ κ คือ ความโค้ง (curvature)

สมการ (6.4) แสดงให้เห็นว่าความเครียดตามแนวยาวของคานเป็นสัดส่วนกับความโค้งและเปลี่ยนแปลงอย่างเป็นเชิงเส้นตรงกับระยะ y ที่ห่างจากผิวสะเทิน ระยะ y จากผิวสะเทินที่พิจารณานี้ ถ้าอยู่เหนือผิวสะเทินจะมีค่าเป็นบวก ดังรูปที่ 6.7(ค) แล้วค่า ε_x จะมีค่าเป็นลบ แสดงว่าเกิดการหดสั้นลง ถ้าระยะ y จากผิวสะเทินที่กำลังพิจารณานี้อยู่ใต้ผิวสะเทิน ระยะ y จะมีค่าเป็นลบและค่าความโค้งเป็นบวก ความเครียด ε_x จะเป็นบวก แสดงว่าเกิดการยืด

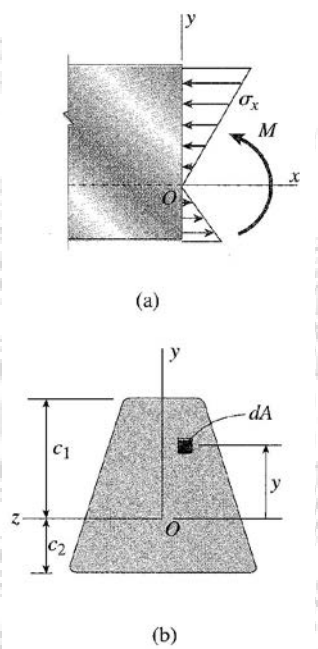
สมการ (6.4) ใช้หาความเครียดตั้งฉากในคานที่เกิดจากการเปลี่ยนแปลงรูปร่างของคานเท่านั้น ไม่ได้คำนึงถึงคุณสมบัติของวัสดุ ดังนั้นความเครียดในคานจะเกิดจากการดัดเพียงอย่างเดียวจะเปลี่ยนแปลงอย่างเป็นเส้นตรงเทียบกับระยะจากผิวสะเทิน โดยไม่พิจารณารูปร่างของเส้นโค้งความเค้น-ความเครียดของวัสดุ

6.5 **ความเค้นตั้งฉากในคาน** (Normal Stresses in Beams (Linearly Elastic Materials)

พิจารณาความเครียดตามแนวแกน ε_x ของคานเนื่องจากการดัด เราสามารถใช้ความสัมพันธ์ความเค้นและความเครียดหาค่าความเค้นในช่วงอิลาสติกที่กระทำตลอดพื้นที่หน้าตัดของคาน ซึ่งจะใช้สัญลักษณ์ σ_x แทนความสัมพันธ์ความเค้น- ความเครียดที่เกิดขึ้นในงานวิศวกรรมจะอยู่ในช่วงการเปลี่ยนแปลงอย่างเป็นเส้นตรง เราแทนกฎของฮุกสำหรับความเค้นในแนวแกน ($\sigma = E\varepsilon$) ลงในสมการ (6.4) จะได้

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = -E\frac{y}{\rho} = -E\kappa y \tag{6.5}$$

สมการนี้แสดงให้เห็นความเค้นตั้งฉากที่กระทำบนหน้าตัดจะแปรเปลี่ยนตามระยะ y จากแกนสะเทินความเค้นนี้จะกระจายดังรูปที่ 6.8(ก) เมื่อคานมีโมเมนต์ดัดและส่วนโค้งเป็นบวก ส่วนโค้งมีค่าเป็นบวกความเค้นมีค่าเป็นลบแสดงว่าเป็นความเค้นอัดเมื่ออยู่เหนือแกนสะเทิน และมีค่าเป็นบวกแสดงว่าเป็นความเค้นดึง ความเค้นอัดจะแสดงด้วยลูกศรที่มีหัวลูกศรพุ่งเข้า ส่วน ความเค้นดึงจะแสดงด้วยลูกศรที่มีหัวลูกศรพุ่งออกจากหน้าตัด



รูปที่ 6.8 ความเค้นตั้งฉากในคานของวัสดุที่มีการยืดหยุ่นในช่วงอิลาสติก
(ก) รูปด้านข้างของคานแสดงการกระจายตัวของความเค้นตั้งฉาก
(ข) หน้าตัดของคานแสดงด้วยแกน z เป็นแกนสะเทินของหน้าตัด

โดยทั่วไปผลลัพธ์ของความเค้นตั้งฉากจะประกอบด้วยความเค้นลัพธ์สองตัว (1) แรงกระทำในทิศทางแกน x และ (2) โมเมนต์ดัดที่กระทำรอบแกน z อย่างไรก็ตามแรงตามแนวแกนจะเป็นศูนย์เมื่อคานอยู่ภายใต้การดัดเพียงอย่างเดียว เราสามารถเขียนสมการทางสถิตศาสตร์ได้เป็น (1) แรงลัพธ์ในทิศทางแกนเท่ากับศูนย์ และ (2) โมเมนต์ลัพธ์เท่ากับโมเมนต์ดัด M สมกรแรกจะให้ตำแหน่งของแกนสะเทินและสมการสองจะให้ความสัมพันธ์ของส่วนโค้ง-โมเมนต์

ตำแหน่งของแกนสะเทิน (Location of Neutral Axis)

พิจารณาเอลิเมนต์ของพื้นที่ dA บนพื้นที่หน้าตัดดังรูปที่ 6.8(ข) โดยที่เอลิเมนต์อยู่ห่างจากแกนสะเทินเป็นระยะ y ดังนั้นความเค้น σ_x ที่กระทำบนพื้นที่หน้าตัดกำหนดด้วยสมการ (6.5) แรงกระทำบนเอลิเมนต์เท่ากับ $\sigma_x dA$ และเป็นความเค้นอัด เมื่อ y เป็นบวก แรงลัพธ์บนพื้นที่หน้าตัดจะมีค่าเท่ากับศูนย์ อินทิกรัล $\sigma_x dA$ ตลอดพื้นที่ A ของหน้าตัดทั้งหมดจะกลายศูนย์ สมการสถิตศาสตร์จะเป็น

$$\int_A \sigma_x dA = -\int_A E\kappa y dA = 0 \qquad \text{(ก)}$$

ส่วนโค้ง κ และมอดุลัสความยืดหยุ่นเป็นค่าคงตัวที่ไม่เท่ากับศูนย์ที่พื้นที่หน้าตัดใดของคานดัด และไม่เกี่ยวข้องกับการอินทิกรัล ดังนั้นเราสามารถเขียนได้

$$\int_A y dA = 0 \qquad (6.6)$$

สมการนี้ คือ โมเมนต์อันดับหนึ่งของพื้นที่ตัดเทียบกับแกน z มีค่าเป็นศูนย์หรืออีกความหมายหนึ่งคือ แกน z จะต้องผ่านจุดศูนย์ถ่วงของพื้นที่หน้าตัด

ดังนั้น แกน z ก็จะเป็นแกนสะเทิน (the neutral axis) ด้วย **สรุปได้ว่าแกนสะเทินจะผ่านจุดศูนย์ถ่วงของพื้นที่หน้าตัด เมื่อวัสดุมีพฤติกรรมตามกฎของฮุกและไม่มีแรงตามแนวแกนกระทำบนพื้นที่หน้าตัด**

ความสัมพันธ์ของส่วนโค้งและโมเมนต์ (Moment –Curvature Relationship)

สมการสถิตศาสตร์สมการที่สองแสดงผลลัพธ์ของโมเมนต์ของความเค้นตั้งฉาก σ_x ที่กระทำบนพื้นที่หน้าตัดจะมีค่าเท่ากับโมเมนต์ดัด M ดังรูปที่ 6.8(ก) เอลิเมนต์ของแรง $\sigma_x dA$ ที่กระทำบนเอลิเมนต์ ของพื้นที่ dA ดังรูปที่ 6.8(ข) อยู่ในทิศทางบวกของแกน x เมื่อ σ_x เป็นลบ ซึ่ง เอลิเมนต์ dA อยู่เหนือแกนสะเทิน ความเค้นบวก σ_x กระทำบนเอลิเมนต์ทำให้เกิดเอลิเมนต์ของโมเมนต์เท่ากับ $\sigma_x y dA$ เอลิเมนต์ของโมเมนต์ที่กระทำในทิศทางตรงกันข้ามกับโมเมนต์ดัดบวก M ดังรูปที่ 6.8(ก) โมเมนต์เล็ก ๆ บน เอลิเมนต์

$$dM = -\sigma_x y dA$$

อินทิกรัลโมเมนต์เล็ก ๆ ตลอดพื้นที่หน้าตัด A จะต้องมีค่าเท่ากับโมเมนต์ดัด

$$M = -\int_A \sigma_x y dA \qquad \text{(ข)}$$

แทน σ_x จากสมการ (6.5) จะได้

$$M = -\int_A \kappa E y^2 dA = \kappa E \int_A y^2 dA \qquad (6.7)$$

ซึ่ง

$$I = \int_A y^2 dA \qquad (6.8)$$

$$M = \kappa E I \qquad (6.9)$$

อินทิกรัลโมเมนต์ความเฉื่อยของพื้นที่หน้าตัดเทียบกับแกน z โมเมนต์ความเฉื่อยมีค่าเป็นบวกและมีมิติเป็นความยาวกำลังสี่เสมอ

สมการ (6.9) สามารถแสดงส่วนโค้งอยู่ในรูปของโมเมนต์ดัดที่เกิดขึ้นในคาน

$$\kappa = \frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI} \tag{5-12}$$

สมการ (6.10) ซึ่งเป็นสมการส่วนโค้งและโมเมนต์แสดงถึงส่วนโค้งที่เกิดขึ้นเป็นสัดส่วนโดยตรงกับโมเมนต์ดัด แต่สัดส่วนกลับกับปริมาณ EI ซึ่งเรียกว่า **flexural rigidity** เป็นการวัดความต้านทานของคานต่อการดัด นั้นคือ ถ้าค่า fluxural rigidity มีค่ามากจะทำให้ส่วนโค้งมีค่าน้อย

ข้อตกลง เรื่องเครื่องหมายสำหรับโมเมนต์ดัด โมเมนต์ดัดที่มีค่าบวกเกิดจากส่วนโค้งค่าบวกและโมเมนต์ดัดค่าลบเกิดจากส่วนโค้งค่าลบดังรูปที่ 6.9

สูตรของการให้ตัวได้ (Flexure Formula)

ความเค้นสามารถหาได้ในรูปของโมเมนต์ดัด โดยการแทนส่วนโค้ง (สมการ 6.10) ลงในสมการของความเค้น σ_x (สมการ 6.5) จะได้

$$\sigma_x = -\frac{My}{I} \tag{6.11}$$

สมการนี้เรียกว่า **flexure formula** แสดงถึงความเค้นเป็นสัดส่วน โดยตรงกับโมเมนต์ดัด M และเป็นสัดส่วนกลับกับโมเมนต์ความเฉื่อย I ของหน้าตัด ดังนั้นความเค้นจะแปรเปลี่ยนอย่างเป็นเส้นตรงเทียบกับระยะ y จากแกนสะเทิน ความเค้นที่คำนวณได้จากสูตรการให้ตัวได้ เรียกว่า **ความเค้นดัด** (bending stresses) หรือ **flexural stresses**

โมเมนต์ดัดในคานจะเป็นบวก ความเค้นดัดจะเป็นบวก (แรงดึง) เหนือส่วนของหน้าตัดที่มีค่า y เป็นลบ นั้นคือบริเวณส่วนล่างของคาน ความเค้นส่วนบนของคานจะเป็นลบ (แรงอัด) ถ้าโมเมนต์ดัดเป็นลบ ความเค้นที่เกิดขึ้นจะกลับกันดังแสดงในรูปที่ 6.10

ความเค้นมากที่สุดที่หน้าตัด (Maximum Stresses at a Cross Section)

ความเค้นดึงและความเค้นอัดที่มากที่สุดที่กระทำหับพื้นที่หน้าตัดใด ๆ จะเกิดขึ้นที่จุดที่อยู่ห่างจากแกนสะเทินมากที่สุด กำหนดให้ c_1 และ c_2 เป็นระยะห่างจากกแกนสะเทินไปบังขอบบนสุดและขอบล่างสุดในทิศทางบวก y และลบ y ดังรูปที่ 6.10 ความเค้นตั้งฉากสูงสุด σ_1 และ σ_2 จะเป็น

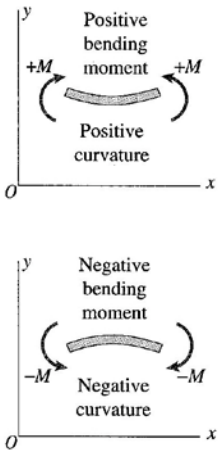
$$\sigma_1 = -\frac{Mc_1}{I} = -\frac{M}{S_1} \tag{6.12ก}$$

$$\sigma_2 = \frac{Mc_2}{I} = \frac{M}{S_2} \tag{6.12ข}$$

ซึ่ง

$$S_1 = \frac{I}{c_1} \tag{6.13ก}$$

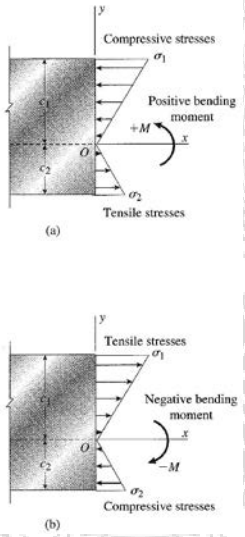
$$S_2 = \frac{I}{c_2} \tag{6.13ข}$$



รูปที่ 6.9 ความสัมพันธ์ระหว่างเครื่องหมายของโมเมนต์ดัดและเครื่องหมายของส่วนโค้ง

ปริมาณ S_1 และ S_2 คือ มอดูลัสของพื้นที่หน้าตัด (section module of the cross-section area) สมการ (6.13ก) และ (6.13ข) จะมีหน่วยเป็นมิติของความยาวกำลังสาม เช่น mm^3 หรือ m^3

ข้อได้เปรียบของการแสดงความเค้นมากที่สุดในรูปของมอดูลัสของหน้าตัด เนื่องจากความจริงที่ว่าแต่ละมอดูลัสของหน้าตัดจะเป็นผลรวมคุณสมบัติของหน้าตัดที่มีความสัมพันธ์กับคานโดยแสดงด้วยปริมาณเพียงตัวเดียว ซึ่งปริมาณนี้สามารถจัดทำเป็นตารางเพื่อแสดงคุณสมบัติของคานทำให้มีความสะดวกต่อผู้ออกแบบ



รูปที่ 6.10 ความสัมพันธ์ระหว่างเครื่องหมายของโมเมนต์ดัด
และทิศทางของความเค้นตั้งฉาก
(ก) โมเมนต์ดัดเป็นบวก
(ข) โมเมนต์ดัดเป็นลบ

รูปร่างที่สมมาตรสองด้าน (Doubly Symmetric Shears)

ถ้าหน้าตัดของคานสมมาตรกับแกน z และ y แล้วจะได้ว่า $c_1 = c_2 = c$ และความเค้นดึงสูงสุดและความเค้นอัดสูงสุดจะมีขนาดเท่ากัน

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = -\frac{Mc}{I} = -\frac{M}{S} \tag{6.14}$$

ซึ่ง

$$S = \frac{I}{c} \tag{6.15}$$

สำหรับคานหน้าตัดรูปสี่เหลี่ยมผืนผ้า (rectangular cross section) กว้าง b สูง h ดังรูปที่ 6.11(ก) โมเมนต์ความเฉื่อยและมอดูลัสของหน้าตัดจะเป็น

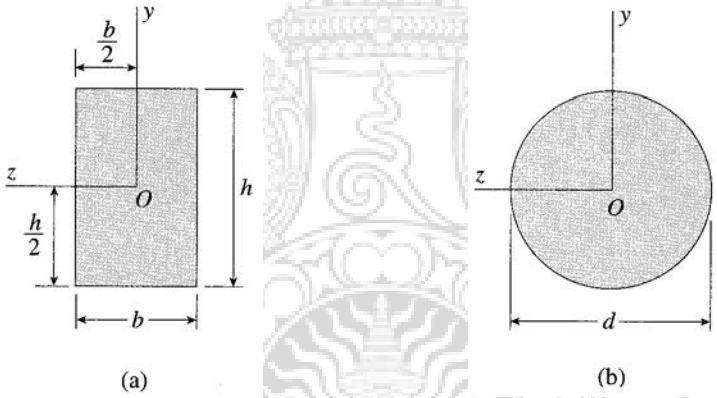
$$I = \frac{bh^3}{12} \tag{6.16ก}$$

$$S = \frac{bh^2}{6} \tag{6.16ข}$$

สำหรับคานหน้าตัดวงกลม (circular cross section) ที่มีเส้นผ่าศูนย์กลาง d ดังรูปที่ 6.11(ข) จะเป็น

$$I = \frac{\pi d^4}{64} \tag{6.17ก}$$

$$S = \frac{\pi d^3}{32} \tag{6.17ข}$$



รูปที่ 6.11 รูปร่างของหน้าตัดที่สมมาตรทั้งสองด้าน