The Study of Quantum Noise of Four-Wave Mixing Process of Entangled Photon Generation within a Nonlinear Fiber Optic Ring Resonator

Chatchawal Sripakdee

This research is funded by Faculty of Science and Technology
Rajamangala University of Technology Phra Nakhon
Year 2011

ชื่อเรื่อง : การศึกษาสัญญาณรบกวนเชิงควอนตัมของกระบวนการผลิตเอนแทงเกิลโฟตอน โดยกระบวนการโฟร์เวฟมิกซิงภายในวงแหวนสั่นพ้องเส้นใยแก้วนำแสงที่ไม่เป็นเชิงเส้น

ผู้วิจัย : นายชัชวาล ศรีภักดี
กลุ่มวิชาฟิสิกส์ สาขาวิชาวิทยาศาสตร์
คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนคร

ปี พ.ศ. : 2554

บทคัดย่อ

ได้สร้างแฮมิลโทเนียนขึ้นสามแบบเพื่ออธิบายอันตรกิริยาของโฟตอนกับโฟตอนและโฟตอนกับโฟนอนในวงแหวนสั่นพ้องเส้นใยแก้วนำแสง โดยแฮมิลโทเนียนดังกล่าวอธิบายการเกิดสัญญาณรบกวนเชิงควอนตัม เมื่อใช้การประมาณแบบมาร์คอฟ-บอร์นและตัวแทนพีบวกของสถานะโฟตอนในปริภูมิเฟส โดยขจัดตัวดำเนินการสถานะของแหล่งความร้อนทิ้งแล้วแทนค่าที่ได้ลงในสมการควบคุมหลักจึงได้สมการฟอกเกอร์แพลงค์ และได้สมการแลงเกอแวงที่สอดคล้องอีกทอดหนึ่งซึ่งอธิบายการวิวัฒน์ตามเวลาของสถานะของเอนแทงเกิลโฟตอน ผลลัพธ์ที่ได้แสดงถึงการเกิดสัญญาณรบกวนเชิงควอนตัมซึ่งขึ้นอยู่กับสามปัจจัยหลัก เมื่อปรับค่าปัจจัยหลักให้เหมาะสมที่สุด พบว่าสามารถลดสัญญาณรบกวนเชิงควอนตัมที่เกิดขึ้นได้ซึ่งมีผลให้สถานะเอนแทงเกิลโฟตอนแบบโพลาไรซ์สามารถแผ่ไปตามเส้นใยแก้วนำแสงนานเพียงพอที่การประยุกต์ใช้งานทางด้านสารสนเทศเชิงควอนตัมบรรลุวัตถุประสงค์

คำสำคัญ: โฟร์เวฟมิกซิง, สารสนเทศเชิงควอนตัม, เส้นใยแก้วนำแสง, เอนแทงเกิลโฟตอน, สัญญาณ-รบกวนเชิงควอนตัม.

Title	:	The Study of Quantum Noise of Four-Wave Mixing Process of Entangled Photon Generation within a Nonlinear Fiber Optic Ring Resonator
Researcher	:	Mr. Chatchawal Sripakdee Physics Group, Department of Science, Faculty of Science and Technology, Rajamangala University of Technology
Year	:	2011

ABSTRACT

The three types of Hamiltonian describing photon-photon and photon-phonon interactions within an optical ring resonator in which quantum noise in fiber optics is generated are given. The Markov-Born approximation and $+P$ representation of photon states in phase space are used in order to eliminate the reservoir state variables by substituting all into the master equation to get the coresponding Fokker-Planck equation. The corresponding Langevin equation describing evolution of quantum states of an entangled photon is analyzed. The optimum results show that the occuring quantum noise can be reduced from the three main parameters where the surviving polarized entangled photon can propagate in the fiber optic system for a long time until photon processings are attained.

Keywords: Four Wave Mixing, Quantum Information, Fiber Optics, Entangled Photon, Quantum Noise.

กิตติกรรมประกาศ

ในนามของหัวหน้าโครงการวิจัย ข้าพเจ้าขอขอบคุณ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนคร ที่สนับสนุนเงินทุนวิจัย ขอขอบพระคุณอาจารย์ผู้ประสิทธิ์ประสาทวิชาความรู้ให้แก่ข้าพเจ้า ศ.ดร. ปรีชา ยุพาพิน ผู้อำนวยการศูนย์วิจัยความเป็นเลิศนาโนโฟโตนิกขั้นสูง ภาควิชาฟิสิกส์ประยุกต์ คณะวิทยาศาสตร์ สถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง ที่ให้ข้อคิดเห็นและข้อเสนอแนะที่มีประโยชน์หลายประการ ขอขอบคุณ ดร.ปรเมษฐ์ จันทร์เพ็ง ที่เป็นธุระเรื่องการเชื่อมต่อ (Splice) เส้นใยแก้วนำแสง และขอขอบคุณ คุณพงษ์วณัฐ สีลาเหลี่ยม วิศวกรผู้เชี่ยวชาญด้านการประมวลผลสัญญาณในเส้นใยแก้วนำแสง ที่อำนวยความสะดวกในการใช้เครื่องมือวิเคราะห์สัญญาณ ขอขอบคุณกัลยาณมิตรทุกท่านโดยเฉพาะคณาจารย์กลุ่มวิชาฟิสิกส์ และกลุ่มวิชาชีววิทยา สาขาวิชาวิทยาศาสตร์ มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนคร ที่คอยให้กำลังใจอย่างสม่ำเสมอ และช่วยสร้างบรรยากาศของการวิจัยที่อบอุ่น

ชัชวาล ศรีภักดี

สารบัญ

หน้า

บัญชีรูปภาพ

บทที่ 1

บทนำ

1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหาที่ทำการวิจัย

ปัจจุบันเส้นใยแก้วได้เข้ามามีบทบาทต่อการสื่อสารอย่างมากและได้รับความนิยมแพร่หลายทั่วโลก ทั้งนี้เพราะเป็นการสื่อสารที่ถือได้ว่าปราศจากสัญญาณรบกวน มีการส่งถ่ายข้อมูลด้วยความเร็วสูงมากและสามารถส่งข้อมูลได้ครั้งละมากๆ ในคราวเดียวกัน ตลอดจนคุณภาพของสัญญาณที่ผู้รับได้รับถือว่าอยู่ในระดับชัดเจนดีมากและยังมีต้นทุนการผลิตต่ำและสะดวกต่อการใช้งานเป็นโครงข่ายทั่วโลก ประเทศไทยได้นำเอาเส้นใยแก้วนำแสงมาใช้ทางด้านเทคโนโลยีสารสนเทศและกำลังเพิ่มขึ้นหลายเท่าตัว โดยเฉพาะการประยุกต์ใช้ทางเครือข่ายอินเตอร์เน็ตความเร็วสูงที่กำลังขยายตัวเข้าไปสู่ชนบทที่ห่างไกล เช่น ในระดับหมู่บ้าน โรงเรียน โรงพยาบาล ธนาคาร ทหาร ตำรวจ หรือ สถานที่ราชการต่างๆ เป็นต้น

เป็นที่ประจักษ์ชัดแล้วว่าเทคโนโลยีการสร้างเส้นใยแก้วนำแสงสามารถประดิษฐ์ชิ้นส่วนอุปกรณ์ที่เล็กมากเข้าไปถึงมาตราส่วนระดับไมโครและนาโนได้แล้ว ซึ่งสามารถนำมาทำประตูทางตรรกศาสตร์เชิงควอนตัมแบบต่างๆ ในวงจรอิเล็กทรอนิกส์ได้ ดังนั้นการสื่อสารในอนาคตบทบาทของสารสนเทศเชิงควอนตัมโดยอาศัยเส้นใยแก้วนำแสงจะมีความสำคัญมากและต้องเพิ่มขึ้นอย่างแน่นอน เพราะให้การสื่อสารด้วยความเร็วสูงสุด มีสัญญาณรบกวนน้อยรวมทั้งมีความปลอดภัยสูงสุดตามหลักการทางทฤษฎีควอนตัมทุกประการ วงแหวนสั่นพ้องใยแก้วนำแสงที่ประดิษฐ์ขึ้นมาในมาตราส่วนระดับนี้ในอนาคตสามารถที่จะบรรจุลงให้เป็นส่วนหนึ่งในวงจรรวมทางอิเล็กทรอนิกส์ได้ เช่น ในโทรศัพท์มือถือ แม้แต่ในเครื่องคอมพิวเตอร์เชิงควอนตัมที่ให้การประมวลผลได้เร็วที่สุด เป็นต้น การใช้เทคโนโลยีเส้นใยแก้วนำแสงในระดับมาตราส่วนนาโนจึงมีความจำเป็นที่จะต้องศึกษาถึงความคมชัดหรือความชัดเจนของสัญญาณ (Fidelity) ที่รับ-ส่งข้อมูล เพราะว่าในมาตราส่วนระดับนี้เป็นไปได้ที่ความชัดเจนของสัญญาณจะถูกรบกวนจากสัญญาณภายนอกจากแหล่งความร้อนที่อยู่รอบๆ ระบบที่กำลังสนใจได้สัญญาณรบกวนระดับจุลภาคดังกล่าวในทางฟิสิกส์เกิดจากการแลกเปลี่ยนพลังงานระหว่างระบบกับสิ่งแวดล้อมจึงมีความสำคัญที่จะต้องศึกษาผลกระทบของสัญญาณรบกวนที่มีผลต่อการสื่อสารเชิงควอนตัมซึ่งจะทำให้เกิดความเข้าใจและสามารถนำไปพัฒนาปรับปรุงหาประสิทธิภาพของระบบการสื่อสารเชิงควอนตัมต่อไปได้

หัวใจสำคัญของการสื่อสารแบบควอนตัม คือ สถานะเอนแทงเกิลโฟตอน (Entangled photon states) ซึ่งถูกนำมาใช้เพื่อความปลอดภัยและความเร็วสูงที่สุดดังที่ได้กล่าวมาแล้ว การสื่อสารแบบนี้สถานะคิวบิต (Qubits or Quantum bits) ของโฟตอนเดี่ยวถูกส่งกลับไปมาระหว่างผู้รับและผู้ส่งซึ่งสถานะคิวบิตสามารถฉายลงใส่สถานะเอนแทงเกิลโฟตอนได้โดยตรง[1] ดังเช่นในการสื่อสารระยะไกลแบบควอนตัม (Quantum Teleportation) หรือสถานะคิวบิตถูกส่งไปมาระหว่างกันโดยตรงเลยก็ได้ เช่น ใช้ในการเข้าและถอดรหัสในควอนตัมคริปโตกราฟฟี (Quantum cryptography) เป็นต้น กรณีการฉายสถานะคิวบิตลงใส่สถานะเอนแทงเกิลโฟตอนนี้จะเกิดประสิทธิภาพหรือประโยชน์สูงสุดเพียงใดขึ้นอยู่กับความยั่งยืนของสถานะเอน

แทงเกิลโฟตอนที่ใช้โดยตรง โดยขึ้นอยู่กับลักษณะการคู่ควบของอันตรกิริยาระหว่างสถานะเอนแทงเกิลโฟตอนกับสิ่งแวดล้อม[2] ซึ่งจะได้ศึกษาวิเคราะห์ต่อไป

ในการผลิตคู่เอนแทงเกิลโฟตอนโดยกระบวนการโฟร์เวฟมิกซิงจำเป็นต้องใช้การปั๊มพัลส์ของคลื่นแสงเลเซอร์ที่มีความแคบมากๆสองพัลส์ของคลื่นที่มีความถี่ต่างกันป้อนเข้าไปกระตุ้นโมเลกุลซิลิกาออกไซด์ในเนื้อสารใยแก้วนำแสงซึ่งมีโครงสร้างเป็นสารอะมอร์ฟัสที่ไม่เป็นเชิงเส้นชนิดเคอร์ χ^3 เพื่อให้ปลดปล่อยสถานะเอนแทงเกิลโฟตอนออกมาภายใต้หลักการอนุรักษ์พลังงานและโมเมนตัม[3-4]ในกระบวนการนี้ที่อุณหภูมิค่าหนึ่งต้องเกิดอันตรกิริยาระหว่างโฟตอนกับโฟนอนขึ้น ซึ่งทำให้มีสัญญาณรบกวนเกิดขึ้นด้วยเสมอและอันตรกิริยาเช่นนี้ให้ผลเช่นเดียวกับการกระเจิงแบบรามาน [5] เป็นผลให้สถานะเอนแทงเกิลโฟตอนถูกทำลายลงได้เนื่องจากมีการถ่ายเทพลังงานและโมเมนตัมให้กับโฟนอนในการกระเจิง

ดังนั้น เอนแทงเกิลโฟตอนที่ได้จากกระบวนการ โฟร์เวฟมิกซิงเมื่อมีปฏิสัมพันธ์กับโมเลกุลของเส้นใยแก้วนำแสงหรืออ่างความร้อนจะเกิดการแลกเปลี่ยนพลังงานและโมเมนตัมระหว่างระบบทั้งสองขึ้น เป็นเหตุให้มีการสูญเสียสถานะเอนแทงเกิลโฟตอนได้ หากมีความเข้าใจถึงผลกระทบนี้ในเชิงลึก ก็จะสามารถหาช่องทางที่จะคงไว้ซึ่งสถานะเอนแทงเกิลได้

1.2 วัตถุประสงค์ของโครงการวิจัย

1.2.1 เพื่อสร้างแบบจำลองแฮมิลโตเนียลของการผลิตเอนแทงเกิลโฟตอนจากกระบวนการโฟร์เวฟมิกซิง รวมทั้งอันตรกิริยาระหว่างโฟตอนกับแหล่งความร้อนในใยแก้วนำแสง

1.2.2 เพื่อคำนวณหาสมการการแผ่ของสถานะคู่เอนแทงเกิลโฟตอนในใยแก้วนำแสงจากแบบจำลองในข้อ 1.2.1 จากการประยุกต์ใช้ตัวแทนสถานะแบบเชิงซ้อน - พี (Complex P representation)

1.2.3 เพื่อศึกษาวิเคราะห์จากปัจจัยต่างๆในแบบจำลองที่มีผลต่อการคงไว้ซึ่งสถานะเอนแทงเกิลโฟตอนเพื่อประโยชน์ต่อการนำไปประยุกต์ใช้ในระบบสารสนเทศและการสื่อสารเชิงควอนตัมรวมทั้งการนำผลของปัจจัยเหล่านั้นไปใช้ในการวิเคราะห์ประกอบการออกแบบการผลิตเส้นใยแก้วนำแสงที่ตอบสนองต่อการสื่อสารเชิงควอนตัมให้เกิดประสิทธิภาพสูงสุดต่อภาคอุตสาหกรรม

1.3 ขอบเขตของโครงการวิจัย

การวิจัยนี้จะวิเคราะห์อันตรกริยาระหว่างโฟนอนกับโฟตอนจำนวน 4 โมด (mode) คือโมดของการปั๊มจากแหล่งกำเนิดแสงเลเซอร์ที่แตกต่างกันจำนวน 2 โมด คือ โมดของสถานะสัญญาณและสถานะนิ่งเฉย เท่านั้นโดยไม่พิจารณาอันตรกิริยาจากของโฟตอนโมดอื่นกับโฟนอนในการกระเจิงและสถานะของโฟตอนทั้งสี่โมดเป็นแบบอาพันธ์ (Coherent states) มีการใช้การประมาณแบบการหมุนของคลื่น (Rotating wave approximation) ของตัวดำเนินการสร้างและทำลายของโฟตอนในแฮมิลโตเนียน สหสัมพันธ์ระหว่างฟังก์ชันการแจกแจงของตัวแปรสัญญาณรบกวนมีการกระจายแบบเกาส์เซียน และเส้นใยแก้วนำแสงไม่เป็นชนิดเออร์เบียมโด๊ป การกระตุ้นเชิงการกระเจิงแบบรามาน (Sir Chandrasekhara Venkata Raman นักฟิสิกส์ชาวอินเดียได้รับรางวัลโนเบล ปี ค.ศ. 1930) จะถูกรวมเข้าในการพิจารณาด้วย

บทที่ 2
เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 บทนำ

การศึกษาทฤษฎีควอนตัมของแสงเริ่มขึ้นอย่างเป็นระบบ โดยนักฟิสิกส์ 3 ท่าน คือ

◇ **แม็กซ์ แพลงค์** (Max Karl Ernst Ludwig Planck) นักฟิสิกส์ชาวเยอรมัน รางวัลโนเบลในปี ค.ศ. 1918 จากผลงาน เรื่อง การแผ่รังสีของวัตถุดำ โดยพบว่า พลังงานของของตัวสั่นแกว่ง มีค่าไม่ต่อเนื่องตามความสัมพันธ์ $\varepsilon_n = nh\nu$ โดยที่ $n = 1, 2, 3, \ldots$ เรียกว่า เลขควอนตัม และ $h = 6.626 \times 10^{-34}$ J s คือ ค่าคงที่ของแพลงค์ และ ν คือ ความถี่ของตัวสั่นแกว่ง

◇ **ไอน์สไตน์** (Albert Einstein) นักฟิสิกส์ชาวเยอรมัน - อเมริกา รางวัลโนเบลในปี ค.ศ. 1921 จากผลงาน เรื่อง ปรากฏการณ์โฟโตอิเล็กตริก เป็นผู้ทำนายการมีอยู่ของอนุภาคโฟตอนซึ่งเป็นเม็ดของก้อนพลังงานที่ปราศจากมวลและเป็นองค์ประกอบมูลฐานของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้า โดยพลังงานของโฟตอนหนึ่งเม็ด คือ $\varepsilon = \hbar\nu$ เมื่อ ν คือ ความถี่ของโฟตอน

◇ **รอย เจ. เกลาเบอร์** (Roy J. Glauber) นักฟิสิกส์ชาวอเมริกา รางวัลโนเบลในปี ค.ศ. 2005 จากผลงานเรื่อง ทฤษฎีควอนตัมของความพร้อมเพรียงเชิงแสง (ของแสงเลเซอร์) ในสาขาวิชาควอนตัมออพติก โดยการทำควอนไทซ์ครั้งที่สองให้แก่สนามแม่เหล็กไฟฟ้า ซึ่งพบว่า สถานะควอนตัมของแสงสามารถจำแนกออกเป็นตัวแทนได้ 3 รูปแบบ ซึ่งจะได้นำเสนอรายละเอียดต่อไป

และยังมีความเจริญก้าวหน้าในศาสตร์ทางด้านแสงเลเซอร์และการประยุกต์ใช้ในเส้นใยแก้วนำแสง ทั้งทางด้านโทรคมนาคมสื่อสาร การแพทย์ การอุตสาหกรรมการวัดอย่างละเอียดและแม่นยำ การเชื่อมและการตัดเจาะ และทางด้านพาณิชย์และลอจิสติกส์ ซึ่งเป็นผลมาจากผลงานของนักฟิสิกส์การทดลอง 2 ท่าน คือ

◇ **ธีโอดอร์ ไมแมน** (Theodore Maiman) นักฟิสิกส์ชาวอเมริกา ในปี ค.ศ. 1960 จากผลงานการประดิษฐ์เครื่องกำเนิดแสงเลเซอร์

◇ **ชาร์ล คืน เคา** (Charles Kuen Kao) นักฟิสิกส์-วิศวกร ชาวจีน (ฮ่องกง) รางวัลโนเบลในปี ค.ศ. 2009 จากผลงานการประดิษฐ์ เส้นใยแก้วนำแสง เพื่อการสื่อสารด้วยแสงในระยะทางไกลมากๆ

งานวิจัยนี้จะเป็นการดำเนินการตามแนวทางของ ศ.ดร. รอย เจ. เกลาเบอร์ เพื่อความเข้าใจในอันตรกิริยาระหว่าง โฟตอน - โฟตอน และ โฟตอน - สสาร โดยเฉพาะอันตรกิริยาภายในเส้นใยแก้วนำแสง ดังนั้น จึงควรที่จะทำความเข้าใจเกี่ยวกับสมการคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าแบบฉบับจนกระทั่งวิวัฒน์มาอยู่ในรูปของสถานะของโฟตอนในรูปแบบของกลศาสตร์ควอนตัม ซึ่งจะได้กล่าวถึงโดยสังเขปในหัวข้อถัดไป

2.2 ทฤษฎีควอนตัมของแสงเบื้องต้น

นักฟิสิกส์ชาวอังกฤษ ชื่อ เจมส์ เคลิก แม็กซ์เวลล์ (James Clerk Maxwell) ค.ศ. 1831–1879 เป็นบุคคลคนแรกที่ทำนายการมีอยู่ของสนามไฟฟ้าและสนามแม่เหล็ก ซึ่งอยู่ในรูปของสมการคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในสุญญากาศ ณ ตำแหน่ง $\mathbf{r} = (x, y, z)$ และ เวลา t โดยเขียนได้ว่า

$$\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) \tag{2.2.1}$$

โดยที่

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{r},t) + \mathbf{A}^{(-)}(\mathbf{r},t) \tag{2.2.2}$$

เรียกว่า ศักย์เวกเตอร์ (Vector Potential) โดยที่ $\mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{r},t) = \left(\mathbf{A}^{(-)}(\mathbf{r},t)\right)^*$ โดย สนามไฟฟ้า $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ มีความสัมพันธ์กับ ศักย์เวกเตอร์ $\mathbf{A}(\mathbf{r},t)$ คือ

$$\mathbf{E}(\mathbf{r},t) = -\frac{\partial}{\partial t}\mathbf{A}(\mathbf{r},t) \tag{2.2.3}$$

สนามแม่เหล็ก $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ มีความสัมพันธ์กับ ศักย์เวกเตอร์ คือ

$$\mathbf{B}(\mathbf{r},t) = \mu_0\mathbf{H}(\mathbf{r},t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r},t) \tag{2.2.4}$$

สมการ (2.2.1) มีผลเฉลยในรูป

$$\mathbf{A}(\mathbf{r},t) = \sum_k \left(\frac{\hbar}{2\omega_k\varepsilon_0}\right)^{1/2} [\hat{a}_k\mathbf{u}_k(\mathbf{r})e^{-i\omega_k t} + \hat{a}_k^\dagger\mathbf{u}_k^*(\mathbf{r})e^{i\omega_k t}]. \tag{2.2.5}$$

เมื่อความสัมพันธ์การสลับที่ของตัวดำเนินการโบซอนของโฟตอน คือ

$$\left[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger\right] = \delta_{kk'}, \tag{2.2.6}$$

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}] = \left[\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_{k'}^\dagger\right] = 0 \tag{2.2.7}$$

และ

$$\mathbf{u}_k(\mathbf{r}) = \frac{1}{L^{3/2}}\hat{e}^{(\lambda)}\exp(i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}) \tag{2.2.8}$$

โดยที่ความสัมพันธ์เชิงตั้งฉากของ $\mathbf{u}_k(\mathbf{r})$ คือ

$$\int_V \mathbf{u}_k^*(\mathbf{r})\mathbf{u}_{k'}(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \delta_{kk'} \tag{2.2.9}$$

สัญลักษณ์ $\hat{e}^{(\lambda)} = |H\rangle, |V\rangle$ ทางขวามือของสมการ (2.2.8) แสดงสถานะโพลาไรซ์ที่ตั้งฉากกัน (orthonormal) ของโฟตอนอนุภาคหนึ่ง ซึ่งมีอยู่สองสถานะเช่นเดียวกับกรณีของสถานะสปินของอิเล็กตรอนอนุภาคหนึ่ง กล่าวคือ $|H\rangle$ ใช้แทนเวกเตอร์สถานะโพลาไรซ์ของโฟตอนในแนวนอน และ $|V\rangle$ แทนเวกเตอร์

สถานะโพลาไรซ์ของโฟตอนในแนวตั้ง ตัวดำเนินการพลังงานรวมหรือแฮมิลโตเนียนของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าอยู่ในรูป

$$\mathscr{H} = \frac{1}{2}\int \left(\varepsilon_0 \mathbf{E}^2 + \mu_0 \mathbf{H}^2\right) d\mathbf{r} \tag{2.2.10}$$

จากผลเฉลยตามสมการ (2.2.5) เมื่อแทนค่าสนามไฟฟ้า $\mathbf{E}(\mathbf{r},t)$ จากสมการ (2.2.3) และสนามแม่เหล็ก $\mathbf{B}(\mathbf{r},t)$ จากสมการ(2.2.4) ลงในสมการ (2.2.10) ดังนั้น ตัวดำเนินการแฮมิลโทเนียน $\mathscr{H}$ จึงเขียนใหม่ได้เป็น

$$\hat{\mathscr{H}} = \sum_k \hbar\omega_k \left(\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2}\right) \tag{2.2.11}$$

ซึ่งตรงกับรูปแบบของตัวดำเนินการพลังงานของการสั่นแกว่งแบบซิมเปิลฮาร์โมนิกที่คุ้นเคยกันดีในกลศาสตร์ควอนตัมนั่นเอง จากเหตุผลนี้จึงทำให้ทราบว่า สถานะของโฟตอนสามารถอธิบายได้ใน 3 รูปแบบ คือ

1. **สถานะฟอคหรือสถานะเชิงตัวเลข (Fock or Numer State)**
   สถานะแบบนี้มีเวกตอร์เจาะจงและค่าเจาะจงที่สอดคล้องกัน คือ

$$\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k |n_k\rangle = n_k |n_k\rangle \tag{2.2.12}$$

   โดยที่ $n_k = 1,\ 2,\ 3, \ldots, \infty$ และ

$$\langle n_k | m_k \rangle = \delta_{mn} \tag{2.2.13}$$

   และการดำเนินการของตัวดำเนินการทำลายต่อสถานะสุญญากาศ (vacuum state) ให้ค่าเจาะจง คือ

$$\hat{a}_k |0\rangle = 0 \tag{2.2.14}$$

   ดังนั้น จึงเขียนสถานะเชิงตัวเลขใดๆให้อยู่ในสถานะสุญญากาศได้เป็น

$$|n_k\rangle = \frac{(\hat{a}_k^\dagger)^{n_k}}{(n_k!)^{1/2}} |0\rangle \tag{2.2.15}$$

   และมีความสัมพันธ์บริบูรณ์ เป็น

$$\sum_{n_k=0}^{\infty} |n_k\rangle \langle n_k| = 1 \tag{2.2.16}$$

2. **สถานะอาพันธ์ (Coherent States)**
   เวกเตอร์เคทของสถานะนี้เขียนอยู่ในรูป

$$|\alpha\rangle = \hat{\mathscr{D}}(\alpha)|0\rangle \tag{2.2.17}$$

   โดยที่ตัวดำเนินการกระจัด

$$\hat{\mathscr{D}}(\alpha) = \exp(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}) \tag{2.2.18}$$

โดยที่ α, α^* เป็นจำนวนเชิงซ้อนและสังยุคของมันตามลำดับ ค่าเจาะจงสถานะอาพันธ์ คือ

$$\hat{a}|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle \tag{2.2.19}$$

หรือเขียนในรูปเวกเตอร์เคทที่สัมพันธ์กับสถานะจำนวนได้เป็น

$$|\alpha\rangle = \exp(-|\alpha|^2/2)\sum\frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}}|n\rangle \tag{2.2.20}$$

3. **สถานะบีบอัด (Squeezed states)**
สถานะบีบอัดหาได้จากการบีบอัดสถานะอาพันธ์ โดยใช้ตัวดำเนินการบีบอัด $\mathscr{S}(\zeta)$ ดังสมการ

$$|\alpha,\zeta\rangle = \mathscr{D}(\alpha)\mathscr{S}(\zeta)|0\rangle \tag{2.2.21}$$

โดยที่

$$\mathscr{S}(\zeta) = \exp\left(\frac{\zeta^*}{2}\hat{a}^2 - \frac{\zeta}{2}(\hat{a}^\dagger)^2\right) \tag{2.2.22}$$

โดยที่ ζ, ζ^* เป็นจำนวนเชิงซ้อนและสังยุคของมันตามลำดับ

2.3 ตัวแทนสถานะโฟตอนในปริภูมิเฟส

การอธิบายสถานะควอนตัมนอกจากจะอาศัยฟังก์ชันคลื่นแล้วยังสามารถอธิบายผ่านตัวดำเนินการแมทริกซ์หนาแน่น $\hat{\rho}$ ได้ด้วย โดยที่

$$\hat{\rho} = \sum_i P_i|\psi_i\rangle\langle\psi_i| \tag{2.3.1}$$

โดยที่ P_i คือ ความน่าจะเป็นที่ระบบอยู่ในสถานะ $|\psi_i\rangle$, โดย $\sum_i P_i = 1$ และ $\mathrm{Tr}[\hat{\rho}] = 1$ และเมื่อใช้สถานะอาพันธ์เป็นเวกเตอร์มูลฐานในการหาค่าแมทริกซ์ความหนาแน่น จะได้ว่า

$$\hat{\rho} = \frac{1}{\pi^2}\iint\langle\alpha|\hat{\rho}|\beta\rangle|\alpha\rangle\langle\beta|d^2\alpha d^2\beta \tag{2.3.2}$$

หรือเขียนใหม่ได้เป็น

$$\hat{\rho} = \int d^2\alpha P'(\alpha)|\alpha\rangle\langle\alpha| \tag{2.3.3}$$

เรียก $P'(\alpha)$ ว่า ตัวแทนแบบพี หรืออีกชื่อหนึ่ง คือ ตัวแทนแบบพีของเกลาเบอร์-ซูดาร์ชาน (Glauber-Sudarshan) เมื่อใช้สถานะอาพันธ์แท้ ในสมการ (9.20) แทนลงในสมการ (9.25) จะได้ว่า

$$\begin{aligned} P'(\alpha) &= \frac{1}{\pi^2}\int d^2z e^{-iz(\alpha-\alpha_0)}e^{-iz^*(\alpha^*-\alpha_0^*)} && (2.3.4)\\ &= \delta^2(\alpha-\alpha_0) && (2.3.5)\end{aligned}$$

โดยอาศัยแนวคิดเช่นนี้เราสามารถที่จะวางนัยสำหรับตัวดำเนินการแมทริกซ์ความหนาแน่นโดยให้

$$\hat{\rho} = \int d\vec{\alpha}P(\vec{\alpha})\Lambda(\vec{\alpha}) \tag{2.3.6}$$

โดยที่ ตัวดำเนินการฉายที่เป็นปกติแล้ว คือ

$$\Lambda(\vec{\alpha}) = \frac{|\alpha\rangle\langle\beta^*|}{\langle\beta^*|\alpha\rangle} \tag{2.3.7}$$

ตัวแทนที่มีประโยชน์อีกแบบหนึ่งคือ ตัวแทนแบบเชิงซ้อน พี (Complex P representation) [9] ซึ่งในที่นี้มีปริภูมิของการวัด คือ $d\vec{\alpha} = d\alpha d\beta$ และ $\Lambda(\alpha,\beta) = \frac{|\alpha\rangle\langle\beta|}{\langle\beta|\alpha\rangle}$ ซึ่งจะได้ว่า

$$\hat{a}\Lambda(\alpha,\beta) = \alpha\Lambda(\alpha,\beta) \tag{2.3.8a}$$

$$\hat{a}^\dagger\Lambda(\alpha,\beta) = \left(\beta + \frac{\partial}{\partial\alpha}\right)\Lambda(\alpha,\beta) \tag{2.3.8b}$$

$$\Lambda(\alpha,\beta)\hat{a} = \left(\frac{\partial}{\partial\beta} + \alpha\right)\Lambda(\alpha,\beta) \tag{2.3.8c}$$

$$\Lambda(\alpha,\beta)\hat{a}^\dagger = \Lambda(\alpha,\beta)\beta \tag{2.3.8d}$$

เมื่อแทนชุดสมการ (2.3.8) ลงในสมการ (2.3.6) จะได้ความสมนัยของการแปลง คือ

$$\hat{a}\hat{\rho} \leftrightarrow \alpha P(\alpha,\beta) \tag{2.3.9a}$$

$$\hat{a}^\dagger\hat{\rho} \leftrightarrow \left(\beta - \frac{\partial}{\partial\alpha}\right)P(\alpha,\beta) \tag{2.3.9b}$$

$$\hat{\rho}\hat{a}^\dagger \leftrightarrow \beta P(\alpha,\beta) \tag{2.3.9c}$$

$$\hat{\rho}\hat{a} \leftrightarrow \left(\alpha - \frac{\partial}{\partial\beta}\right)P(\alpha,\beta) \tag{2.3.9d}$$

2.4 สถานะเอนแทงเกิลโฟตอน

สถานะเอนแทงเกิล โพลาไรซ์ของคู่โฟตอนสามารถเขียนอยู่ในรูปสถานะของเบลล์ (Bell's states or EPR states) ที่แตกต่างกัน 4 สถานะ [10] ตามหลักสถิติของโบส-ไอน์สไตน์ คือ

$$\psi^{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|H\rangle_k|V\rangle_{k'} \pm |V\rangle_{k'}|H\rangle_k\} \tag{2.4.1}$$

$$\Phi^{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{2}}\{|H\rangle_k|H\rangle_{k'} \pm |V\rangle_k|V\rangle_{k'}\} \tag{2.4.2}$$

เมื่อ $|H\rangle_k$ และ $|V\rangle_k$ คือ ฟังก์ชันสถานะโพลาไรซ์ของโฟตอนที่ครอบครองโมด k ในแนวนอนและแนวตั้งตามลำดับ และสำหรับสถานะคิวบิตของโฟตอนอนุภาคหนึ่งที่ครอบครองโมดนี้ คือ

$$\Theta_k = c|H\rangle_k + d|V\rangle_k \tag{2.4.3}$$

โดยที่

$$|c|^2 + |d|^2 = 1 \tag{2.4.4}$$

หรือถ้าพิจารณาสภาพเอนแทงเกิลกันของสองระบบย่อยใดๆซึ่งระบบย่อยทั้งสองถูกอธิบายด้วยตัวดำเนินการแมทริกซ์หนาแน่น $\hat{\rho}_1$ และ $\hat{\rho}_2$ ตามลำดับ จะได้ว่า

$$\hat{\rho} \neq \hat{\rho}_1 \otimes \hat{\rho}_2 \tag{2.4.5}$$

2.5 เอนแทงเกิลโฟตอนจากกระบวนการโฟร์เวฟมิกซิง

ความสำเร็จในการผลิตคู่เอนแทงเกิลโฟตอนในย่านการสื่อสารจากเส้นใยแก้วนำแสงภายใต้การทำงานของกลุ่มนักวิจัยของศาสตราจารย์ เพรม คูมาร์ [3, 12] โดยการปั๊มพัลส์ของคลื่นแสงเลเซอร์ที่เป็นโพลาไรซ์เชิงเส้นสองสถานะคือสถานะในแนวนอนและแนวตั้ง ($|H\rangle$ และ $|V\rangle$) เข้าไปในเส้นใยแก้วนำแสงที่มีลักษณะโค้งเป็นวงแบบแซกแนค(Sagnac loop) เพื่อกระตุ้นโมเลกุลของเส้นใยแก้วที่เป็นซิลิกาออกไซด์ซึ่งเป็นสารที่ไม่เป็นเชิงเส้นชนิดเคอร์ $\chi^{(3)}$ โดยวิธีโฟร์เวฟมิกซิงทำให้เกิดสถานะกระตุ้นฮาร์โมนิกลำดับที่ 3 ขึ้น และปลดปล่อยคู่โฟตอนสถานะเบลล์ออกมาอยู่ในรูปของการซ้อนทับกันของสถานะสัญญาณ (Signal state) และสถานะนิ่งเฉย (Idler state) ออกมา ซึ่งโดยวิธีการทดลองของนักวิจัยกลุ่มนี้ทำให้สามารถหาค่าสัมประสิทธิ์การฝ่าฝืนอสมการของเบลล์ (Bell's inequality)ได้อีกด้วย ในปีเดียวกันกลุ่มของศาสตราจารย์ทาเกสึ[4] ก็สามารถผลิตคู่เอนแทงเกิลโฟตอนจากเส้นใยแก้วนำแสงโดยวิธีโฟร์เวฟมิกซิงด้วยตนเอง (Self four-wave mixing) ได้เช่นกันซึ่งวิธีนี้โมเลกุลของซิลิกาออกไซด์ถูกกระตุ้นด้วยกระบวนการโฟร์เวฟมิกซิงเช่นกัน แต่จะแตกต่างกันที่ สถานะของเอนแทงเกิลโฟตอนที่ได้รับโดยวิธีนี้เรียกว่า สถานะเอนแทงเกิลเชิงเวลา (Time-bin entanglement) ซึ่งเวลาของการเกิดโฟตอนทั้งสองมีความแตกต่างกัน (Early and late) ดังนั้น สถานะเวกเตอร์ฐานของเอนแทงเกิลโฟตอนในกรณีนี้จึงเป็นการซ้อนทับกันของสถานะเวลาของการเกิดช้าหรือเร็ว[?] แทนที่จะเป็นสถานะโพลาไรเซชัน การศึกษาการเกิดคู่เอนแทงเกิลโฟตอนโดยกระบวนการโฟร์เวฟมิกซิงในเชิงทฤษฎี วิธีหนึ่งคือศึกษาจากการตอบสนองต่อสนามไฟฟ้าของวัตถุที่เป็นแบบไม่เชิงเส้นชนิดเคอร์ [11] ผ่านโพลาไรเซชัน ในเนื้อวัตถุที่เกิดจากการเหนี่ยวนำของสนามไฟฟ้า $\mathbf{E}$ [10] โดย

$$\mathbf{P}_i = \varepsilon_0 \left(\chi_{i,j}^{(1)} \mathbf{E}_j + \chi_{i,j,k}^{(2)} \mathbf{E}_j \mathbf{E}_k + \chi_{i,j,k,l}^{(3)} \mathbf{E}_j \mathbf{E}_k \mathbf{E}_l + \dots \right) \tag{2.5.1}$$

โดยทั่วไป $\chi^{(n)}$ คือ เทนเซอร์ของสภาพอ่อนไหวทางไฟฟ้าลำดับที่ n ซึ่งในกรณีของใยแก้วนำแสงที่ถูกปั๊มหรือกระตุ้นด้วยพัลส์ของแสงเลเซอร์ที่แคบมากๆ พจน์ที่เด่นชัดมากที่สุด คือ $\chi^{(3)}$ ซึ่งการหาแฮมิลโตเนียนจากพจน์นี้ทำได้โดย ลำดับแรกหาสมการการแผ่ของสนามไฟฟ้าในใยแก้วนำแสงความยาว L ตามแนวแกน z ที่สอดคล้องกันครบทั้งสี่โมดของกระบวนการโฟร์เวฟมิกซิงตามแบบฉบับของสมการแมกซ์เวลล์ และลำดับต่อมาทำควอนไทซ์ครั้งที่สองของสนามไฟฟ้า $\mathbf{E}_k = \mathbf{E}_k{}^{(+)} + \mathbf{E}_k{}^{(-)}$ ตามวิธีของเกลาเบอร์ดังที่ได้กล่าวมาแล้วข้างต้น อีกทั้งอาศัยการแปลง $\frac{\partial}{\partial t} \equiv \frac{c}{n}\frac{\partial}{\partial z}$ และความสัมพันธ์ของการสลับที่ของตัวดำเนินการ $[\mathbf{E}_j^{(+)}(z), \mathbf{E}_k^{(-)}(z')] = \frac{\hbar\omega}{2\varepsilon_0 V_Q}\delta(z-z')\delta_{jk}$ แล้วใช้สมการการเคลื่อนที่ของไฮเซนเบิร์ก $i\hbar\frac{\partial \mathbf{E}_k}{\partial t} = [\mathbf{E}_k, \mathscr{H}]$ จึงทำให้ได้แฮมิลโทเนียนของกระบวนการโฟร์เวฟมิกซิงตามแบบของทฤษฎีควอนตัมที่เกิดขึ้นในเส้นใยแก้วนำแสงเป็น [12]

$$\mathscr{H} = \kappa\varepsilon_0\chi^{(3)} \int_V dV \left(\mathbf{E}_s^{(-)} \mathbf{E}_i^{(-)} \mathbf{E}_p^{(+)} \mathbf{E}_p^{(+)} + h.c. \right) \tag{2.5.2}$$

เมื่อ κ เป็นปริมาณที่ขึ้นอยู่กับรายละเอียดทางการทดลอง และ ตัวห้อย s, i, p หมายถึง โมดของโฟตอนที่ครอบครองสถานะสัญญาณ สถานะนิ่งเฉยและสถานะการปั๊ม ตามลำดับ ส่วน $h.c.$ หมายถึง สังยุคเชิงซ้อนเฮอร์มิเชียน เมื่อประยุกต์ใช้ทฤษฎีการรบกวนลำดับที่ 1 จากทฤษฎีควอนตัมแฮมิลโตเนียนดังกล่าวสามารถ

นำไปคำนวณหาฟังก์ชันคลื่นของเอนแทงเกิลโฟตอนได้จาก

$$|\Psi\rangle = |0\rangle + \frac{1}{i\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} dt \mathscr{H} |0\rangle \tag{2.5.3}$$

เมื่อแทนแฮมิลโตเนียนลงในสมการนี้จะได้

$$|\Psi\rangle = |0\rangle + \sum_{k_s,k_i} F(k_s,k_i)\hat{a}^{\dagger}_{k_s}\hat{a}^{\dagger}_{k_i}|0\rangle \tag{2.5.4}$$

โดยที่ฟังก์ชันสเปกตรัมของคู่เอนแทงเกิลโฟตอน(Two-photon spectral function) คือ

$$F(k_s,k_i) = g\int_{-L}^{0} dz \frac{1}{\sqrt{1-ik''(\Omega_p)\sigma_p^2 z}} \exp\left\{-\frac{ik''(\Omega_p)z}{4}(\nu_s-\nu_i+\Delta)^2 - 2i\gamma P_p z - \frac{(\nu_s-\nu_i)}{4\sigma_p^2}\right\} \tag{2.5.5}$$

โดย

$$g = \frac{\kappa\pi^2\chi^{(3)}P_p}{i\varepsilon_0 V_Q n^3 \lambda_p \sigma_p}$$

σ_p คือ แถบความกว้างของสเปกตรัมความถี่เชิงมุมของพัลส์ของคลื่นแสงปั๊ม,
$\gamma = 2\pi n_2/\lambda A_{eff}$, $\lambda \approx \lambda_{p,s,i}$, $n_2 = \frac{3}{4n^2\varepsilon_0 c}\Re e(\chi^{(3)}_{xxxx})$, $P_p = 2\sqrt{\pi}A_{eff}\varepsilon_0 cn\sigma_p^2|\mathbf{E}_p|^2$,
$k''(\Omega_p) = \left.\frac{d^2k}{d\omega^2}\right|_{\omega=\Omega_p}$ คือ การกระจายลำดับที่สองอันเนื่องมาจากการกระจายของความเร็วกลุ่มของคลื่นแสงปั๊มจากความถี่ตรงกลาง Ω_p, และ
$\Delta = \Omega_s - \Omega_i$ คือ ความต่างของค่าความถี่ตรงกลางของสถานะสัญญาณกับสถานะนิ่งเฉยของคู่โฟตอน และอัตราการนับความพร้อมกันของคู่เอนแทงเกิลโฟตอน (Coincidence-photon counting rate) ที่เคลื่อนที่มาถึงเครื่องวัดสัญญาณตัวที่1 และตัวที่ 2 คือ

$$C_c = \int_0^{\infty} dT_1 \int_0^{\infty} dT_2 \langle\Psi|\mathbf{E}_1^{(-)}\mathbf{E}_2^{(-)}\mathbf{E}_2^{(+)}\mathbf{E}_1^{(+)}|\Psi\rangle \tag{2.5.6}$$

เมื่อแทนฟังก์ชันคลื่นสมการ (2.5.4) ลงในสมการนี้จะได้

$$C_c = A_2(\gamma P_p L)^2 \frac{\sigma_0^2}{\sigma_p\sqrt{\sigma_p^2+\sigma_0^2}} I_{cc}. \tag{2.5.7}$$

โดยที่

$$A_2 = \frac{\alpha^2\pi n^2 A_{eff}^4}{144 V_Q^{8/3}},$$

และ

$$I_{cc} = \frac{1}{L^2}\int_{-L}^{0} dz_1 \int_{-L}^{0} dz_2 \frac{\exp\left[-2i\gamma P_p(z_1-z_2) - \frac{c'b'^2}{1+b'^2} + \frac{i}{2}\arctan(b') + \frac{ir'}{1+b'^2}\right]}{\sqrt{(1-ik''\sigma_p^2 z_1)(1+ik''\sigma_p^2 z_2)}\sqrt[4]{1+b'^2}} \tag{2.5.8}$$

เมื่อ $b' = -k''(z_1-z_2)\sigma_0^2/2, c' = \Delta^2/2\sigma_0^2$ และ $r' = -k''(z_1-z_2)\Delta^2/4.$

2.6 การเกิดสัญญาณรบกวนในเส้นใยแก้วนำแสง

สัญญาณรบกวนในเส้นใยแก้วนำแสงเกิดขึ้นเมื่อสถานะของเอนแทงเกิลโฟตอนที่กำลังแผ่ไปในท่อเส้นใยแก้วนำแสงมีอันตรกิริยากับสิ่งแวดล้อม เช่น แหล่งพลังงานที่อยู่ในรูปของโฟนอน โดยมีการแลกเปลี่ยนพลังงานระหว่างกัน ซึ่งแบบจำลองที่อธิบายอันตรกิริยาดังกล่าวที่ง่ายที่สุดคือ การกระเจิงเนื่องมาจากปรากฏการณ์รามานน์ซึ่งแฮมิลโทเนียนสามารถเขียนให้อยู่ในรูป [10.2]

$$\mathscr{H}_R = \hbar \int_{-\infty}^{\infty} dx \int_{0}^{\omega} d\omega \left\{ \mathbf{E}^{(+)}(x)\mathbf{E}^{(-)}(x)R(\omega,x)[\hat{b}(x,\omega)+\hat{b}^{\dagger}(\omega,x)] + \omega\hat{b}^{\dagger}(x,\omega)\hat{b}(x,\omega) \right\}. \tag{2.6.1}$$

โดยที่ $R(x,\omega)$ คือ ฟังก์ชันอัตราการเลื่อนสถานะรามานน์ (Raman transition rate) ซึ่งเป็นค่าจริง ส่วน $\hat{b},\hat{b}^{\dagger}$ คือ ตัวดำเนินการทำลายและตัวดำเนินสร้างโฟนอนตามลำดับ ซึ่งการกระจัดของตำแหน่งของอะตอมรอบจุดสมดุลเฉลี่ยที่อุณหภูมิหนึ่งในสภาวะสมดุลความร้อนเป็นสัดส่วนโดยตรงกับ $(\hat{b}+\hat{b}^{\dagger})$

2.7 สมการฟอกเกอร์-แพลงค์

กระบวนการมาร์คอฝ (Markov process) ความน่าจะเป็นมีลักษณะเป็นแบบมีเงื่อนไข โดยความน่าจะเป็นในอนาคตขึ้นกับความน่าจะเป็นของปัจจุบัน ดังนี้

$$P(x_1,t_1;x_2,t_2;\ldots \mid y_1,\tau_1;y_2,\tau_2;\ldots) = P(x_1,t_1;x_2,t_2;\ldots \mid y_1,\tau_1) \tag{2.7.1}$$

ซึ่งแสดงว่าสำหรับกรณีของมาโคเวียนแล้วความน่าจะเป็นร่วมสามารถเขียนอยู่ในรูป

$$P(x_1,t_1;x_2,t_2;\ldots x_n,t_n) = \prod_{i=1}^{n-1} P(x_i,t_i \mid x_{i-1},t_{i-1})P(x_n,t_n) \tag{2.7.2}$$

ในบางกรณีแทนที่จะเป็นการกระโดดแบบห้วงๆ หากเราเลือกอธิบายกระบวนการสุ่มให้เป็นแบบต่อเนื่อง ถ้าเป็นอย่างนี้สมการแชปแมน-โคลโมโกรอฝ จะเขียนอยู่ในรูป

$$\Phi(w \mid x) \equiv W(x+w \mid x) \tag{2.7.3}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}P(x,t \mid x_0,t_0) &= \int dw\Phi(w \mid x-w)P(x-w,t \mid x_0,t_0) \\
&= \int e^{\left(-w\frac{\partial}{\partial x}\right)}[\Phi(w \mid x)P(x,t \mid x_0,t_0)]dw \\
&= \int \left[1 - w\frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2}w^2\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \ldots\right][\Phi(w \mid x)P(x,t \mid x_0,t_0)]dw
\end{aligned} \tag{2.7.4}$$

และเนื่องจาก $\int dw\Phi(w \mid x) = 0$ จึงได้

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,t \mid x_0,t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{\partial^n}{\partial x^n}[Q_n(x)P(x,t \mid x_0,t_0)] \tag{2.7.5}$$

โดยที่

$$Q_n(x) = \int w^n \Phi(w \mid x) dw \tag{2.7.6}$$

ในหลายกรณีสมการข้างต้นถูกตัดทอนพจน์ทิ้งไปโดยเก็บไว้เพียงสองพจน์แรก ทำให้ได้สมการฟอกเกอร์-แพลงค์ ดังนี้ ในกรณีหนึ่งมิติ โดยที่ $Q_1 = A$ และ $Q_2 = B$ เราได้

$$\frac{\partial}{\partial t}P(x,t \mid x_0,t_0) = -\frac{\partial}{\partial x}[A(x,t)P(x,t \mid x_0,t_0)] + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}[B(x,t)P(x,t \mid x_0,t_0)] \tag{2.7.7}$$

มีการวางนัยไปสู่กรณีของหลายตัวแปร ทำให้ได้สมการฟอกเกอร์-แพลงค์ อยู่ในรูป

$$\frac{\partial}{\partial t}P(\mathbf{x},t \mid \mathbf{x}_0,t_0) = -\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}[\mathbf{A}_i(\mathbf{x},t)P(\mathbf{x},t \mid \mathbf{x}_0,t_0)] + \frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\partial^2}{\partial x_i x_j}[\mathbf{B}_{ij}(\mathbf{x},t)P(\mathbf{x},t \mid \mathbf{x}_0,t_0)] \tag{2.7.8}$$

โดยที่ $\mathbf{A}$ คือ เวกเตอร์ลอยเลื่อน และ $\mathbf{B}$ คือ แมทริกซ์การแพร่ สมการนี้ยังเขียนอยู่ในรูป

$$\frac{\partial}{\partial t}P(\mathbf{x},t \mid \mathbf{x}_0,t_0) + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i}\mathbf{J}_i(\mathbf{x},t) = 0 \tag{2.7.9}$$

โดยที่

$$\mathbf{J}_i(\mathbf{x},t) = [\mathbf{A}_i(\mathbf{x},t)P(\mathbf{x},t \mid \mathbf{x}_0,t_0)] - \frac{1}{2}\sum_j \frac{\partial}{\partial x_j}[\mathbf{B}_{ij}(\mathbf{x},t)P(\mathbf{x},t \mid \mathbf{x}_0,t_0)] \tag{2.7.10}$$

เรียก $\mathbf{J}_i(\mathbf{x},t)$ ว่า กระแสความหนาแน่น

2.7.1 กระบวนการของไวเนอร์

ในกรณีพิเศษที่ $A = 0, B = 1$ สมการฟอกเกอร์-แพลงค์ เขียนได้เป็น

$$\frac{\partial}{\partial t}P(w,t|w_0,t_0) = \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial w^2}[P(w,t|w_0,t_0)] \tag{2.7.11}$$

หากเราใช้ฟังก์ชันส่อลักษณะ

$$\phi(s,t) = \int dw e^{isw} P(w,t|w_0,t_0) \tag{2.7.12}$$

จึงได้ สมการเชิงอนุพันธ์สำหรับ คือ

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -s^2\phi \tag{2.7.13}$$

เนื่องจาก $P(w,t|w_0,t_0)|_{t=t_0} = \delta(t-t_0)$ ดังนั้น $\phi(s,t_0) = \exp(isw_0)$ ผลเฉลยของสมการนี้จึงอยู่ในรูป

$$\phi(s,t) = \mathrm{e}^{\left[isw_0 - \frac{1}{2}s^2(t-t_0)\right]} \tag{2.7.14}$$

ซึ่งอยู่ในรูปแบบของเกาสส์ โดยการแปลงผกผันของมันยังอยู่ในรูปแบบของเกาสส์อีก กล่าวคือ

$$P(w,t|w_0,t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t_0)}}\,\mathrm{e}^{-\frac{(w-w_0)^2}{2(t-t_0)}} \tag{2.7.15}$$

โดยมีโมเมนต์สองตัวแรก คือ

$$\langle W \rangle = w_0 \tag{2.7.16}$$

$$\langle (\Delta W)^2 \rangle = t - t_0 \tag{2.7.17}$$

การแจกแจงนี้มีการกระจายตัวออกในเวลาและสอดคล้องกับแบบจำลองที่แม่นยำของไอน์สไตน์ในเรื่องการเคลื่อนที่แบบบราวเนี่ยน

ลักษณะส่อที่สำคัญอย่างหนึ่งของกระบวนการของไวเนอร์ คือ ความเป็นอิสระจากกันของส่วนเพิ่มซึ่งเป็นสิ่งที่มีประโยชน์ในการหาปริพันธ์ในกระบวนการสโตแคสติก ซึ่งโดยทั่วไป สำหรับกระบวนการของมาร์คอฟ เราได้

$$\begin{aligned} P(w_n, t_n; w_{n-1}, t_{n-1}; \ldots w_0, t_0) &= \prod_{i=0}^{n-1} P(w_{i+1}, t_{i+1} \mid w_0, t_0) \\ &= \prod_{i=0}^{n-1} \left\{ [2\pi(t_{i+1} - t_i)]^{-1/2} \exp\left[-\frac{(w_{i+1} - w_i)}{2(t_{i+1} - t_1)} \right] \right\} P(w_0, t_0) \end{aligned} \tag{2.7.18}$$

โดยนิยามของส่วนเพิ่มไวเนอร์ คือ

$$\Delta W_i = W(t_i) - W(t_{i-1}) \tag{2.7.19}$$

และ

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1} \tag{2.7.20}$$

ดังนั้น ความหนาแน่นความน่าจะเป็นร่วมของส่วนเพิ่มนี้ คือ

$$P(\Delta w_n; \Delta w_{n-1}; \ldots \Delta w_1; w_0) = \prod_{i=0}^{n} \left\{ [2\pi \Delta t_i]^{-\frac{1}{2}} \exp\left[-\frac{(\Delta w_i)^2}{2(\Delta t_i)} \right] \right\} P(w_0, t_0) \tag{2.7.21}$$

ดังนั้น พวกมันจึงเป็นอิสระต่อกันในทางสถิติ

เรานิยามค่าเฉลี่ยและฟังก์ชันสหสัมพันธ์อัตโนมัติ (Autocorrelation function) โดย

$$\langle W(t) | W_0, t_0 \rangle = \int dw P(w, t \mid w_0, t_0) w \tag{2.7.22}$$

และ

$$\begin{aligned} \langle W(t)(W(t_0))^{\mathrm{T}} | W_0, t_0 \rangle &= \iint dw dw_0 P(w, t; w_0, t_0) w w_0^{\mathrm{T}} \\ &= \int dw_0 \langle W(t) \mid W_0, t_0 w_0^{\mathrm{T}} \rangle P(w_0, t_0) \end{aligned} \tag{2.7.23}$$

ดังนั้น สำหรับกระบวนการของไวเนอร์

$$\langle W(t) W(s) \mid W_0, t_0 \rangle = \langle [W(t) - W(s)] W(s) \mid W_0, t_0 \rangle + \langle W^2(s) \rangle \tag{2.7.24}$$

และเนื่องจากความเป็นอิสระต่อกันของส่วนเพิ่ม พจน์แรกทางด้านขวามือจึงมีค่าเป็นศูนย์ จึงได้

$$\langle W(t) W(s) \mid W_0, t_0 \rangle = w_0^2 + \min(t - t_0, s - t_0) \tag{2.7.25}$$

2.7.2 คุณสมบัติทั่วไปของสมการฟอกเกอร์-แพลงค์

ดังที่กล่าวมาแล้ว พจน์แรกทางขวามือของสมการฟอกเกอร์-แพลงค์ (2.44) คือ พจน์ลอยเลื่อนซึ่งจะเป็นตัวควบคุมการเคลื่อนที่ที่กำหนดได้ ส่วนพจน์ที่สอง คือ พจน์การแพร่ซึ่งจะเป็นสาเหตุให้ความน่าจะเป็นเกิดการกระจายตัวออกไป ความแตกต่างในบทบาทของสองพจน์นี้สามารถมองเห็นได้ง่ายเมื่อคำนวณหา $\langle x_i \rangle$ และ $\langle x_i x_j \rangle$ ซึ่งแสดงให้เห็นโดยง่ายว่า

$$\frac{d\langle x_i \rangle}{dt} = \langle \mathbf{A}_i \rangle \tag{2.7.26}$$

$$\frac{d\langle x_i x_j}{dt}\rangle = \langle x_i \mathbf{A}_j \rangle + \langle x_j \mathbf{A}_i \rangle + \frac{1}{2}\langle \mathbf{B}_{ij} + \mathbf{B}_{ji} \rangle \tag{2.7.27}$$

2.8 สมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติก

วิธีหนึ่งที่จะจัดการกับปัญหาการเคลื่อนที่แบบบราวเนี่ยนหรือปัญหาที่เกี่ยวข้องกับแรงที่กระทำแบบสุ่ม ก็คือโดยอธิบายพฤติกรรมผ่านทางสมการแลงเกแวงหรืออีกช่องทางหนึ่งคือผ่านทางสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติก

$$\dot{V} = -\gamma V + L(t) \tag{2.8.1}$$

โดยที่ในกรณีของอนุภาคบราวเนี่ยน ทางด้านขวาของสมการคือแรงของของไหลที่กระทำต่ออนุภาค ซึ่งเกิดจากสององค์ประกอบ คือ

ก. แรงแดมป์ $-\gamma V$

ข. แรงที่แปรค่าอย่างรวดเร็ว $L(t)$ ซึ่งไม่ขึ้นกับความเร็วของอนุภาค โดยแรงชนิดนี้เกี่ยวข้องกับการชนกันระหว่างโมเลกุลของน้ำกับอนุภาคบราวเนี่ยนโดยที่ค่าเฉลี่ยของแรงชนิดนี้เป็นศูนย์ ดังนั้น

$$\langle L(t) \rangle = 0 \tag{2.8.2}$$

$$\langle L(t)L(t') \rangle = D\delta(t-t') \tag{2.8.3}$$

$\langle L(t)L(t') \rangle$ คือ ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ของสองเวลา

เรานิยามสเปกตรัมโดยเป็นการแปลงฟูริเยร์ของฟังก์ชันสหสัมพันธ์ของสองเวลา ดังนี้

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \langle L(t+\tau)L(t) \rangle \tag{2.8.4}$$

เห็นได้ทันทีว่าเนื่องจากการแปลงของฟังก์ชันเดลต้าจะให้ผลลัพธ์เป็นค่าคงที่อันเนื่องมาจาก $L(t)$ มีสเปกตรัมชนิดแบน ซึ่งมันสอดคล้องกับสัญญาณรบกวนขาว (White noise)

สมมติว่าความเร็วต้นของอนุภาคบราวเนี่ยนถูกกำหนดให้เป็น $V(0) = V_0$ ดังนั้น ที่เวลา $t \geq 0$ ในแต่ละวิถีตัวอย่าง จะได้

$$V(t) = V_0 e^{-\gamma t} + e^{-\gamma t} \int_0^t e^{\gamma t'} L(t') dt' \tag{2.8.5}$$

เมื่อใช้คุณสมบัติของ L เราสามารถคำนวณหา $\langle V\rangle$ และ $\langle V^2\rangle$ ได้

$$\langle V(t)|V_0,t_0\rangle = V_0 \mathrm{e}^{-\gamma t} \tag{2.8.6}$$

และ

$$\begin{aligned}\langle V^2(t)|V_0,t_0\rangle &= V_0^2\mathrm{e}^{-2\gamma t}+\mathrm{e}^{-2\gamma t}\int_0^{t'}dt'\int_0^{t''}dt''\mathrm{e}^{\gamma(t'+t'')}\langle L(t')L(t'')\rangle \\ &= V_0^2\mathrm{e}^{-2\gamma t}+\frac{D}{2\gamma}[1-\mathrm{e}^{-2\gamma t}]\end{aligned} \tag{2.8.7}$$

เมื่อเวลา $t\to\infty$

$$\langle V^2(t)|V_0,t_0\rangle = \frac{D}{2\gamma} \tag{2.8.8}$$

ตรงกันข้ามสำหรับช่วงเวลาที่สั้นๆ จะได้

$$\langle(\Delta V)^2(t+\Delta t)|V_0,t_0\rangle = D\Delta t+\mathscr{O}(\Delta t)^2 \tag{2.8.9}$$

ในกรณีนี้จะได้สัมประสิทธิ์ของพจน์ลอยเลื่อนและพจน์การแพร่ คือ

$$A=\frac{\langle\Delta V\rangle}{\Delta t}=\frac{\langle V-V_0\rangle\big|_{t=t_0+\Delta t}}{\Delta t}=-\gamma V \tag{2.8.10}$$

$$B=\frac{\langle(\Delta V)^2\rangle}{\Delta t}=D \tag{2.8.11}$$

ดังนั้น สมการฟอกเกอร์-แพลงค์ ที่สอดคล้องคือ

$$\frac{\partial}{\partial t}P(V,t)=\gamma\frac{\partial}{\partial V}(VP)+\frac{D}{2}\frac{\partial^2 P}{\partial V^2} \tag{2.8.12}$$

สมการนี้อธิบายกระบวนการออร์นสไตล์-ยูเลนเบค ซึ่งสอดคล้องกับพจน์ลอยเลื่อนเชิงเส้นและพจน์การแพร่ซึ่งเป็นค่าคงที่

ตอนนี้จะคำนวณหาสเปกตรัมกำลังของ V โดยในเบื้องต้นเราต้องได้ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ของสองเวลา

$$\begin{aligned}\langle V(t)V(t')\rangle &= V_0^2\mathrm{e}^{-\gamma(t+t')}+\mathrm{e}^{-\gamma(t+t')}\int_0^{t}dt''\int_0^{t'}dt'''\mathrm{e}^{\gamma(t''+t''')}\langle L(t'')L(t''')\rangle \\ &= V_0^2\mathrm{e}^{-\gamma(t+t')}+\mathrm{e}^{-\gamma(t+t')}D\int_0^{t'}dt'''\mathrm{e}^{2\gamma t'''} \\ &= V_0^2\mathrm{e}^{-\gamma(t+t')}+\mathrm{e}^{-\gamma(t+t')}\frac{D}{2\gamma}\left[\mathrm{e}^{2\gamma t'}-1\right]\end{aligned} \tag{2.8.13}$$

ในกรณีสถานะคงที่ ซึ่ง $t,t'\to\infty$ แต่ด้วย $(t-t')=\tau$ จึงได้

$$\langle V(t+\tau)V(t)\rangle=\frac{D}{2\gamma}\mathrm{e}^{-\gamma|\tau|} \tag{2.8.14}$$

ในที่สุดหลังจากทำการแปลงแบบฟูริเยร์เราได้กำลังสเปกตรัมของ V คือ

$$\begin{aligned}S_V(\omega) &= \frac{1}{2\pi}\int \mathrm{e}^{i\omega\tau}\langle V(t+\tau)V(t)\rangle\,d\tau \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{D}{\omega^2+\gamma^2}\end{aligned} \tag{2.8.15}$$

2.9 แคลคูลัสของอิโตะและสตราโตโนวิช

สมการแลงเกแวงรูปทั่วไปเขียนอยู่ในรูป

$$\frac{dx}{dt} = a(x,t) + b(x,t)L(t) \tag{2.9.1}$$

โดยที่ตัวคูณ D ถูกดูดซับไว้ใน b เรียบร้อยแล้ว ดังนั้น

$$\langle L(t)L(t')\rangle = \delta(t-t') \tag{2.9.2}$$

$$\langle L\rangle = 0 \tag{2.9.3}$$

ตอนนี้เรานิยาม

$$W(t) = \int_0^t L(t')dt' \tag{2.9.4}$$

โดยสมมติว่ามีความต่อเนื่อง ดังนั้น

$$\langle W(t+\Delta t) - W_0(t) \mid W_0(t)\rangle = \langle \int_t^{t+\Delta t} dsL(s)\rangle = 0 \tag{2.9.5}$$

$$\begin{aligned}\langle [W(t+\Delta t) - W_0(t)]^2 \mid W_0(t)\rangle &= \langle \int_t^{t+\Delta t} ds_1\rangle \int_t^{t+\Delta t} ds_2 L(s_1)L(s_2) \\ &= \int_t^{t+\Delta t} ds_1 \int_t^{t+\Delta t} ds_2 \delta(s_1 - s_2) \\ &= \Delta t \end{aligned} \tag{2.9.6}$$

ดังนั้น เราสามารถเขียนสมการฟอกเกอร์-แพลงค์ สำหรับ W ด้วย $A = 0$ และ $B = 1$ ซึ่งสอดคล้องกับกระบวนการของไวเนอร์ และ $Ldt = dW$ คือ ส่วนเพิ่มขึ้นไวเนอร์

สมการอนุพันธ์สโตแคสติก (2.79) ยังไม่อยู่ในรูปแบบที่นิยามเต็มขั้นซึ่งขึ้นอยู่กับการอินทิเกรตให้ตัวมัน โดยทั่วไปจะไม่มีปัญหาและเป็นไปตามหลักของแคลคูลัสธรรมดาที่นำมาประยุกต์ใช้ อย่างไรก็ตามเราต้องระมัดระวังในการใช้เนื่องจาก เรากำลังเล่นอยู่กับฟังก์ชันในเวลาที่กำลังแปรค่าอย่างรวดเร็ว ดังนั้น เราจึงนิยามปริพันธ์เป็นแบบลิมิตกำลังสองเฉลี่ยของผลรวม (ms) แบบไรมานน์สไตล์เจส คือ

$$\int_{t_0}^{t} f(t')dW(t') = \text{ms}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\tau_i)[W(t_i) - W(t_{i-1})] \tag{2.9.7}$$

โดยที่ $t_{i-1} \le \tau_i \le t_i$ และ เราแบ่งช่วงเวลาจาก t_0 ถึง t ออกเป็น n ช่วงเวลาระหว่างกลาง $t_1, t_2, \ldots, t_n$ เราสามารถพิสูจน์ได้ว่ามันขึ้นอยู่กับ $f(\tau_i)$ ที่เราเลือก มีแนวทางการเลือกที่นิยมกัน 2 แบบ คือ

ก. แคลคูลัสแบบวิธีของอิโตะ ด้วย $\tau_i = t_{i-1}$

ข. แคลคูลัสแบบวิธีของสตราโตโนวิช ด้วย $f(\tau_i) = \frac{1}{2}[f(t_i) - f(t_{i-1})]$

จากข้อสมมติฐานข้างต้น เราจะได้เรียนรู้การคำนวณหาสิ่งต่างๆด้วยการใช้ทั้งแคลคูลัสแบบวิธีของอิโตะและแบบวิธีของสตราโตโนวิช

สำหรับแคลคูลัสแบบวิธีของสตราโตโนวิช เรามี

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{S}) \int_{t_0}^{t} W(t)dW(t') &= \mathrm{ms}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{W(t_i)+W(t_{i-1})}{2}\right] \\
&= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\left[W^2(t_i)-W^2(t_{i-1})\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[W^2(t)-W^2(t_0)\right] \qquad (2.9.8)
\end{aligned}
$$

ซึ่งเป็นไปตามหลักการของแคลคูลัสธรรมดาที่ทราบกันดี

ในทางตรงกันข้ามสำหรับแคลคูลัสแบบวิธีของอิโตะ

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{I}) \int_{0}^{t} W(t)dW(t') &= \mathrm{ms}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[W(t_{i-1})][W(t_i)-W(t_{i-1})] \\
&= \mathrm{ms}\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}[W(t_{i-1})\Delta W(t_i)] \\
&= \mathrm{ms}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\left\{[W(t_{i-1})+\Delta W(t_i)]^2-W^2(t_{i-1})-\Delta W^2(t_i)\right\} \\
&= \frac{1}{2}[W^2(t)-W^2(t_0)]-\mathrm{ms}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Delta W^2(t_i) \qquad (2.9.9)
\end{aligned}
$$

และเนื่องจาก

$$
\mathrm{ms}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\Delta W^2(t_i) = t-t_0 \qquad (2.9.10)
$$

ในที่สุดเราได้

$$
(\mathrm{I}) \int_{t_0}^{t} W(t')dW(t') = \frac{1}{2}[W^2(t)-W^2(t_0)-(t-t_0)] \qquad (2.9.11)
$$

ท้ายที่สุดสำหรับการหาปริพันธ์แบบวิธีของอิโตะเราสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$
dW^2(t) = dt \qquad (2.9.12)
$$

$$
dW^{2+N}(t) = 0 \quad \text{สำหรับ} \quad N=1,2,3 \qquad (2.9.13)
$$

จากสมบัติต่างๆข้างต้นเราพบว่า $dW \sim \sqrt{dt}$ และเราสามารถมีได้แค่เพียงพจน์ dW^2 ซึ่งแตกต่างจากแคลคูลัสธรรมดาทั่วไป

2.10 สูตรของอิโตะ

พิจารณาฟังก์ชัน $f[x(t)]$ เราจะแสดงที่มาของสูตรจากแคลคูลัสแบบวิธีของอิโตะ

$$
\begin{aligned}
df[x(t)] &= f[x(t)+dx]-f[x(t)] \\
&= f'[x(t)]dx+\frac{1}{2}f''[x(t)]dx^2 \\
&= f'[x(t)]\{a(x,t)+b(x,t)dW\}+\frac{1}{2}f''[x(t)]\{b(x,t)dW^2+\ldots
\end{aligned}
$$

ประยุกต์ใช้สมการ(2.90) และ (2.91) จึงได้

$$df[x(t)] = \left\{a(x,t)f'[x(t) + \frac{1}{2}b(x,t)f''[x(t)]\right\}dt + b(x,t)f'[x(t)]dW \tag{2.10.1}$$

สูตรดังกล่าวสามารถขยายไปสู่กรณีที่มีมิติสูงขึ้นได้โดยง่าย

ตอนนี้เราทำค่าเฉลี่ยให้แก่สูตรของอิโตะ

$$\begin{aligned}\frac{d\langle f(x)\rangle}{dt} &= \int dx\partial_t P(x,t)f(x) \\ &= \int dx\left[a\partial_x f + \frac{b}{2}\partial_x^2 f\right]P(x,t)\end{aligned}$$

และเมื่อทำการอินทิเกรตแยกส่วนและละทิ้งพจน์เชิงพื้นผิว เราได้

$$\int dxf(x)\partial_t P(x,t) = \int dxf(x)\left[\partial_x aP(x,t) - \frac{1}{2}\partial_x^2 bP(x,t)\right]$$

จึงได้สมการฟอกเกอร์-แพลงค์ คือ

$$\partial_t P(x,t\mid x_0,t_0) = -\partial_x[a(x,t)P(x,t\mid x_0,t_0)] + \frac{1}{2}\,\partial_x^2[b(x,t)P(x,t\mid x_0,t_0)] \tag{2.10.2}$$

ทำนองเดียวกัน สำหรับกรณีหลายตัวแปร หากเรามีสมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติก เป็น

$$(\mathrm{I})\; d\mathbf{x} = \mathbf{a}(x,t) + \mathbf{b}(x,t)d\mathbf{W} \tag{2.10.3}$$

โดยที่ $d\mathbf{W}$ เป็นกระบวนการไวเนอร์ที่มี n องค์ประกอบ ดังนั้นสมการฟอกเกอร์-แพลงค์ แบบอิโตะ คือ

$$\begin{aligned}\partial_t P(\mathbf{x},t\mid\mathbf{x}_0,t_0) &= -\sum_i \partial_i[\mathbf{a}_i(\mathbf{x},t)P(\mathbf{x},t\mid\mathbf{x}_0,t_0)] \\ &\quad+\frac{1}{2}\sum_{i,j}\partial_i\partial_j\left[\mathbf{b}\mathbf{b}^{\mathrm{T}}(\mathbf{x},t)\right]_{ij}P(\mathbf{x},t\mid\mathbf{x}_0,t_0)\end{aligned} \tag{2.10.4}$$

ดังนั้น จากสัญลักษณ์ข้างต้น จึงได้ $\mathbf{B} = \mathbf{b}\mathbf{b}^{\mathrm{T}}$ ทำนองเดียวกัน สำหรับกรณีแคลคูลัสแบบวิธีสตราโตโนวิช จะได้

$$(\mathrm{S})\; d\mathbf{x} = \mathbf{a}^{\mathrm{S}}(x,t) + \mathbf{b}^{\mathrm{S}}(x,t)d\mathbf{W} \tag{2.10.5}$$

เราจึงได้สมการฟอกเกอร์-แพลงค์แบบสตราโตโนวิช คือ

$$\begin{aligned}\partial_t P(\mathbf{x},t\mid\mathbf{x}_0,t_0) &= -\sum_i \partial_i[\mathbf{a}_i^{\mathrm{S}}(\mathbf{x},t)P(\mathbf{x},t\mid\mathbf{x}_0,t_0)] \\ &\quad+\frac{1}{2}\sum_{i,j,k}\partial_i\left[\mathbf{b}_{ik}^{\mathrm{S}}\partial_j(\mathbf{b}_{jk}^{\mathrm{S}})^{\mathrm{T}}(\mathbf{x},t)\right]P(\mathbf{x},t\mid\mathbf{x}_0,t_0)\end{aligned} \tag{2.10.6}$$

เมื่อเปรียบเทียบระหว่างสมการฟอกเกอร์-แพลงค์ทั้งสองแบบ จะพบว่า

$$\mathbf{a}_i^{\mathrm{S}} = \mathbf{a}_i - \frac{1}{2}\sum_{j,k}\mathbf{b}_{kj}\partial_k\mathbf{b}_{ij}^{\mathrm{T}} \tag{2.10.7}$$

$$\mathbf{b}_{ik}^{\mathrm{S}} = \mathbf{b}_{ik} \tag{2.10.8}$$

ความสัมพันธ์ในตอนนี้บอกให้ทราบว่าถ้ากำหนดสมการฟอกเกอร์-แพลงค์ มันจะสอดคล้องกับสมการแลงเกแวงที่ถูกอินทิเกรตตามแนวทางแคลคูลัสแบบวิธีของอิโตะ ด้วยสัมประสิทธิ์ลอยเลื่อน $\mathbf{a}$ และการแพร่ $\mathbf{b}$ ตามลำดับ และเช่นกันสมการแลงเกแวงถูกอินทิเกรตตามแนวทางแคลคูลัสแบบวิธีของสตราโตโนวิชนำไปสู่ $\mathbf{a}^{\mathrm{S}}$ และ $\mathbf{b}^{\mathrm{S}}$ ซึ่งสอดคล้องกับสัมประสิทธิ์ลอยเลื่อนและการแพร่ตามลำดับเช่นกัน

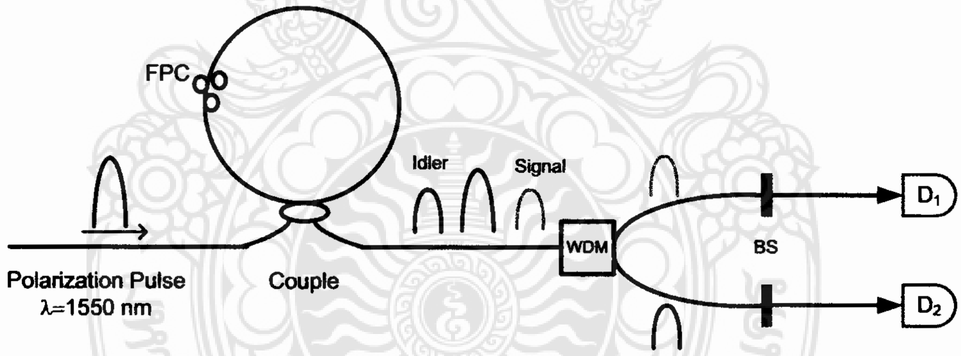
บทที่ 3
วิธีการดำเนินวิจัย

การวิจัยนี้มีลำดับขั้นตอนการดำเนินงาน ดังนี้

1. ศึกษาการเกิดเอนแทงเกิลโฟตอนจากกระบวนการโฟร์เวฟมิกซิงในวงแหวนสั่นพ้องเส้นใยแก้วนำแสง
2. สร้างแฮมิลโทเนียนของระบบเอนแทงเกิลโฟตอนจากกระบวนการโฟร์เวฟมิกซิง
3. สร้างแฮมิลโทเนียนของอันตรกิริยาระหว่างระบบเอนแทงเกิลโฟตอนกับแหล่งความร้อน
4. สร้างสมการการวิวัฒน์ของสถานะเอนแทงเกิลโฟตอนจากกระบวนการโฟร์เวฟมิกซิง
5. วิเคราะห์ผลที่ได้จากขั้นตอนที่ 4 เกี่ยวกับการวิวัฒน์ของสถานะเอนแทงเกิลที่ได้
6. ออกแบบการทดลองเพื่อสนับสนุนยืนยันความถูกต้องของหลักทฤษฎีที่สร้างขึ้นตามข้อ 1 - 4.
7. ปรับปรุงทฤษฎีให้มีความสอดคล้องกับผลการทดลอง

โดยรายละเอียดการดำเนินงานของแต่ละขั้นตอน มีดังนี้

3.1 แฮมิลโทเนียนของพัลส์แสงเลเซอร์ที่ปั๊มเข้าสู่วงแหวนสั่นพ้องเส้นใยแก้วนำแสง



รูปที่ 3.1: พัลส์แสงเลเซอร์ที่แคบมากถูกปั๊มให้แผ่เข้าไปในเส้นใยแก้วนำแสงแล้วเคลื่อนที่วนอยู่ภายในวงแหวนสั่นพ้องใยแก้วนำแสงทำให้เกิดคู่เอนแทงเกิลโฟตอนขึ้นมาและเคลื่อนที่หลุดออกมาจากวงแหวนสั่นพ้อง และถูกตรวจจับที่เซนเซอร์ของเครื่องตรวจรับ D_1 และ D_2 ส่วนพัลส์แสงปั๊มที่หลุดออกมาด้วยจะถูกบล็อกไว้ด้วยอุปกรณ์การแบ่งความยาวคลื่นแสงแบบหลายชั้นหรือ WDM.

ในกระบวนการโฟร์เวฟมิกซิง เมื่อต้องการผลิตเอนแทงเกิลโฟตอนภายในวงแหวนสั่นพ้องเส้นใยแก้วนำแสงที่ไม่เป็นเชิงเส้นประเภท $\chi^{(3)}$ จึงต้องออกแบบเครื่องมือและอุปกรณ์ ดังรูปที่ 3.1 พัลส์แสงเลเซอร์ความเข้มสูงมากถูกปั๊มเข้าไปเพื่อกระตุ้นเนื้อสารในวงแหวนสั่นพ้องให้พร้อมปลดปล่อยโฟตอนคู่ใหม่ออกมา สามารถเขียนแฮมิลโทเนียนที่สอดคล้องได้ คือ

$$\mathscr{H}_{\text{pump}} = i\hbar \sum_{k=p_1,p_2} \varepsilon_k(\hat{a}_k^\dagger - \hat{a}_k) \tag{3.1.1}$$

โดย ε_k คือ ความแรงของสนามแม่เหล็กไฟฟ้า โมด k

3.2 แฮมิลโทเนียนของกระบวนการโฟร์เวฟมิกซิงในวงแหวนสั่นพ้องเส้นใยแก้วนำแสง

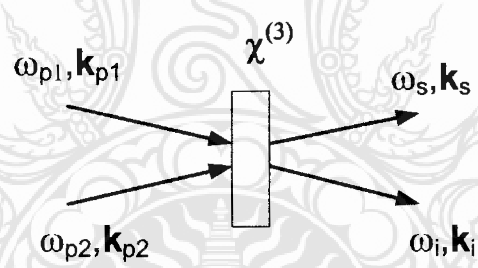
เมื่อพลังงานและโมเมนตัมของระบบมีความเหมาะสม อันตรกิริยาการสร้างเอนแทงเกิลโฟตอนก็ดำเนินการขึ้นภายใต้กฎการอนุรักษ์โมเมนตัมและพลังงาน ณ เวลาหนึ่ง และอุณหภูมิ T ดังรูปที่ 3.2 กล่าวคือ อันตรกิริยาโฟเวฟมิกซิงสามารถเขียนแฮมิลโทเนียน ได้ในรูป

$$\mathscr{H}_{\text{fwm}} = i\hbar\chi_0 \hat{a}_s^\dagger \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_{p_1} \hat{a}_{p_2} \tag{3.2.1}$$

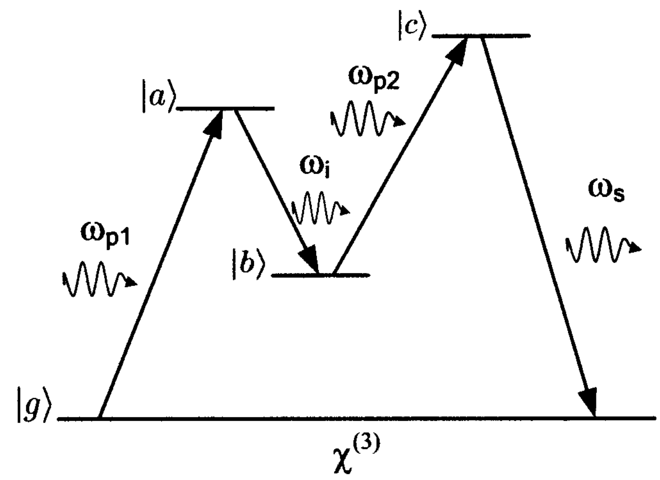
โดยที่ เทนเซอร์ความแรงของการตอบสนองแบบไม่เชิงเส้นของวงแหวนสั่นพ้องต่อพัลส์แสงปั๊มเข้า อยู่ในรูป

$$\chi_0 = \frac{3\varepsilon_0\chi^{(3)}\omega^2 k_0^2}{8\varepsilon^2 V_Q}$$

ε_0 คือ สภาพยอมของสุญญากาศ และ ε คือ ค่าคงที่ไดอิเล็กตริกของวงแหวนสั่นพ้องเส้นใยแก้วนำแสง ณ อุณหภูมิ T ส่วน k_0 คือ เลขคลื่นของแสงในสุญญากาศ V_Q คือ ปริมาตรของการควอนไทซ์ ω คือ ความถี่ของคลื่นแสงปั๊มเข้า โดยมีความสัมพันธ์การสลับที่ของตัวดำเนินการ $[\hat{a}_\ell^\dagger, \hat{a}_{\ell'}] = \delta_{\ell,\ell'}$



รูปที่ 3.2: แสดงแผนภาพการผลิตเอนแทงเกิลโฟตอน โดยที่บางตำแหน่งในวงแหวนสั่นพ้องเส้นใยแก้วนำแสงที่ไม่เป็นเชิงเส้นชนิด $\chi^{(3)}$ มีความเหมาะสมตามกฎการอนุรักษ์พลังงานและโมเมนตัมของโฟตอน ณ เวลาหนึ่ง จนเกิดกระบวนการโฟร์เวฟมิกซิงขึ้น โดยพัลส์ของแสงปั๊มเข้า 2 ลูกที่เป็นโพลาไรซ์แล้ว ในโมด p_1 และ p_2 ซึ่งมีความเข้มสูงมากและความกว้างลูกคลื่นที่แคบมากๆ มีอันตรกิริยากับโมเลกุลของซิลิกา จนในที่สุดพัลส์เอนแทงเกิลโฟตอนโมด s และ i ที่เป็นโพลาไรซ์แล้ว ถูกสร้างขึ้นในวงแหวนสั่นพ้องและมีโอกาสที่จะหลุดออกมาจากวงแหวนสั่นพ้องแล้วเคลื่อนที่ไปตามเส้นใยแก้วนำแสงต่อไป



รูปที่ 3.3: แสดงกระบวนการโฟเวฟมิกซิงชนิดพาราเมตริกลดหลั่นตามชั้นขาลงจากการกระตุ้นเนื้อสารวงแหวนสั่นพ้องเส้นใยแก้วนำแสงโดยการดูดกลืนโฟตอนในโมดปั๊ม p_1 และ p_2 ที่ความถี่ ω_{p_1} และ ω_{p_2} ตามลำดับ และการคายเอนแทงเกิลโฟตอนโมด s และ i ที่ความถี่ ω_s และ ω_i ออกมาจากระดับพลังงานของโมเลกุลซิลิกาออกไซด์ของเส้นใยแก้วนำแสงซึ่งไม่เป็นชนิดเชิงเส้น $\chi^{(3)}$

3.3 แฮมิลโทเนียนของอันตรกิริยาระหว่างโฟตอนกับแหล่งความร้อน

ในกระบวนการ โฟร์เวฟมิกซิง ไม่สามารถหลีกเลี่ยงอันตรกิริยาระหว่างอ่างความร้อนซึ่งเรียกว่าสิ่งแวดล้อมกับระบบของโฟตอนได้ โดยมีการแลกเปลี่ยนพลังงานระหว่างกันของสองระบบนี้ ผลที่ตามมา ก็คือ แหล่งความร้อนจะไปกระตุ้นโมเลกุลของเส้นใยแก้วนำแสงให้ เกิดคลื่นโฟนอนขึ้นจนมีความสามารถเปลี่ยนค่าดัชนีหักเหของเส้นใยแก้วนำแสงได้ซึ่งจะไปเหนี่ยวนำให้เกิดการหักเหสองแนวขึ้นอีกทั้งยังส่งผลกระทบต่อการเกิดใหม่และสูญเสียเอนแทงเกิลโฟตอนได้ สถานการณ์จึงเข้าสู่การพิจารณาระบบควอนตัมแบบเปิด ดังนั้น แฮมิลโทเนียนของอันตรกิริยาระหว่างโฟตอนกับโฟนอน คือ

$$\mathscr{V} = \hbar \sum_{k=i,s,p_1,p_2} \left(\hat{a}_k\hat{\Gamma}_k^\dagger + \hat{a}_k^\dagger\hat{\Gamma}_k\right) \tag{3.3.1}$$

โดยที่ $\Gamma_k^\dagger$ และ Γ_k คือ ตัวดำเนินการการสร้างและทำลายโฟนอนตามลำดับ ซึ่งมีความสัมพันธ์ของการสลับ ที่ คือ $[\Gamma_k, \Gamma_{k'}^\dagger] = \delta_{k,k'}$ และในกรณีทั่วไป

$$\hat{\Gamma}(t) = \sum_k g_k \hat{b}_k e^{i(\omega-\omega_k)t} \tag{3.3.2}$$

โดย $\hat{b}_k$ คือ ตัวดำเนินการของโฟนอน โมด k

3.4 แฮมิลโทเนียนของระบบควอนตัมเปิดภายในวงแหวนสั่นพ้อง

จากสมการ(3.1.1, 3.2.1, 3.3.1) จึงรวมแฮมิลโทเนียนทั้ง 3 เข้าด้วยกันเพื่อให้ได้แฮมิลโทเนียนรวม ซึ่งประกอบด้วย 2 ส่วนหลัก ดังนี้

$$\mathscr{H}_\mathrm{T} = \mathscr{H}_\mathrm{pump} + \mathscr{H}_\mathrm{fwm} + \mathscr{V} \tag{3.4.1}$$

โดยสองพจน์แรก เรียกว่า ส่วนของระบบ และพจน์ที่สาม เรียกว่า ส่วนของแหล่งความร้อน

3.5 สมการควบคุมหลักต่อการวิวัฒน์ของตัวดำเนินการ

จากสมการ(3.4.1) จะพบว่ามีการเกิดการควบกันระหว่างตัวดำเนินการของระบบและตัวดำเนินของแหล่งความร้อน จึงเป็นการไม่สะดวกอย่างยิ่งหากต้องหาการวิวัฒน์ในเวลาของทั้งตัวดำเนินการของระบบและของตัวดำเนินการแหล่งความร้อน จึงต้องกำจัดตัวดำเนินการของแหล่งความร้อนหรือโฟนอนออกไปให้หมด โดยอาศัยการประมาณแบบมาร์คอฟและบอร์น ซึ่งตั้งอยู่บนแนวคิดที่ว่า การวิวัฒน์ของตัวดำเนินการหนาแน่นของระบบ $\hat{\rho}_{\mathrm{S}}$ ณ ปัจจุบันไม่ขึ้นกับเหตุการณ์ในอดีตของแหล่งความร้อน กล่าวคือ

$$\hat{\rho}_{\mathrm{SR}}(t) = \hat{\rho}_{\mathrm{S}}(t) \otimes \hat{\rho}_{\mathrm{R}}(0) \tag{3.5.1}$$

โดยที่

$$\hat{\rho}_{\mathrm{R}}(0) = \frac{\prod_j e^{-\hbar\omega_j \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j / k_B T}}{\mathrm{Tr}_{\mathrm{B}}\left[\prod_j e^{-\hbar\omega_j \hat{b}_j^\dagger \hat{b}_j / k_B T}\right]} \tag{3.5.2}$$

โดยที่ Tr_{B} หมายถึง การเทรซตลอดตัวดำเนินการของอ่างความร้อน โดยมีสมการควบคุมหลัก คือ

$$\begin{aligned} i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\rho_{\mathrm{S}} &= [\mathscr{H}_{\mathrm{fwm}} + \mathscr{H}_{\mathrm{pump}}, \hat{\rho}_{\mathrm{S}}] \\ &+ \sum_{k=i,s,p_1,p_2} \gamma_k (2\hat{a}_k\hat{\rho}_{\mathrm{S}}\hat{a}_k^\dagger - \hat{a}_k^\dagger\hat{a}_k\hat{\rho}_{\mathrm{S}} - \hat{\rho}_{\mathrm{S}}\hat{a}_k^\dagger\hat{a}_k) \\ &+ \sum_{k=i,s,p_1,p_2} 2n_k^{\mathrm{th}}\gamma_k (\hat{a}_k\hat{\rho}_{\mathrm{S}}\hat{a}_k^\dagger - \hat{\rho}_{\mathrm{S}}\hat{a}_k\hat{a}_k^\dagger - \hat{a}_k^\dagger\hat{\rho}_{\mathrm{S}}\hat{a}_k + \hat{a}_k^\dagger\hat{\rho}_{\mathrm{S}}\hat{a}_k) \end{aligned} \tag{3.5.3}$$

โดยที่ γ_k คือ อัตราการแดมป์ของโมด k และ k_B คือ ค่าคงที่ของโบลทซ์มานน์ โดยมีจำนวนโฟตอนเฉลี่ยที่ความถี่ ω_k ในอ่างความร้อน ณ อุณหภูมิ T คือ

$$n_k^{\mathrm{th}} = \frac{1}{e^{\hbar\omega_k/k_B T} - 1}$$

บทที่ 4

ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

4.1 สมการฟอกเกอร์แพลงค์สำหรับสถานะโฟตอน

จากแฮมิลโทเนียนที่สร้างขึ้นเพื่ออธิบายกลไกการสร้างคู่ของเอนแทงเกิลโฟตอนซึ่งมีอันตรกิริยากับอ่างความร้อน เมื่อประยุกต์เข้ากับสมการควบคุมหลัก (Master Equation) และประยุกต์ใช้รูปแบบสถานะของโฟตอนในตัวแทนแบบบวกพี (+P representation) สมการหลักจะลดรูปมาเป็นสมการฟอกเกอร์แพลงค์ คือ

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial P(\boldsymbol{\alpha},t)}{\partial t} = & \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha_{p_1}}(\chi\alpha_s\alpha_i\alpha_{p_2}^+ - \mathscr{E}_{p_1} + \gamma_{p_1}\alpha_{p_1}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_{p_1}^+}(\chi\alpha_s^+\alpha_i^+\alpha_{p_2} - \mathscr{E}_{p_1} + \gamma_{p_1}\alpha_{p_1}^+) \right. \\
& + \frac{\partial}{\partial \alpha_{p_2}}(\chi\alpha_s\alpha_i\alpha_{p_1}^+ - \mathscr{E}_{p_2} + \gamma_{p_2}\alpha_{p_2}) + \frac{\partial}{\partial \alpha_{p_2}^+}(\chi\alpha_s^+\alpha_i^+\alpha_{p_1} - \mathscr{E}_{p_2} + \gamma_{p_2}\alpha_{p_2}^+) \\
& - \frac{\partial}{\partial \alpha_i}(\chi\alpha_s^+\alpha_{p_2}\alpha_{p_1} + \gamma_i\alpha_i) - \frac{\partial}{\partial \alpha_i^+}(\chi\alpha_s\alpha_{p_2}^+\alpha_{p_1}^+ + \gamma_i\alpha_i^+) \\
& - \frac{\partial}{\partial \alpha_s}(\chi\alpha_i^+\alpha_{p_2}\alpha_{p_1} + \gamma_s\alpha_s) - \frac{\partial}{\partial \alpha_s^+}(\chi\alpha_i\alpha_{p_2}^+\alpha_{p_1}^+ + \gamma_s\alpha_s^+) \\
& - \frac{\partial^2}{\partial \alpha_{p_2}\partial \alpha_{p_1}}\chi\alpha_s\alpha_i - \frac{\partial^2}{\partial \alpha_s\partial \alpha_i}\chi\alpha_{p_2}\alpha_{p_1} \\
& + \frac{\partial^2}{\partial \alpha_s^+\partial \alpha_i^+}\chi\alpha_{p_2}^+\alpha_{p_1}^+ - \frac{\partial^2}{\partial \alpha_{p_2}^+\partial \alpha_{p_1}^+}\chi\alpha_s^+\alpha_i^+ \\
& + \frac{\partial^2}{\partial \alpha_{p_1}\partial \alpha_{p_1}^+}2n_{p_1}^{th}\gamma_{p_1} + \frac{\partial^2}{\partial \alpha_{p_2}\partial \alpha_{p_2}^+}2n_{p_2}^{th}\gamma_{p_2} \\
& \left. + \frac{\partial^2}{\partial \alpha_i\partial \alpha_i^+}2n_i^{th}\gamma_i + \frac{\partial^2}{\partial \alpha_s\partial \alpha_s^+}2n_s^{th}\gamma_s \right\} P(\boldsymbol{\alpha},t). \qquad (4.1.1)
\end{aligned}
$$

จากสมการที่ได้นี้ หากเราอาศัยเทคนิคการกระจายของ แครเมอร์-มอยัล (Kramers-Moyal expansion) เพื่อประยุกต์ใช้ในการถอดจากสมการอนุพันธ์อันดับสองให้เป็นสมการอนุพันธ์อันดับหนึ่ง ในที่สุดจะได้สมการแลงเกอแวงที่สอดคล้องกับตัวแปรเชิงซ้อนของโฟตอนในโมดปั๊ม $p1, p2$ โมดสัญญาณ s และโมดนิ่งเฉย i

ซึ่งมีการเข้าควบกันของตัวแปรสถานะโฟตอนแล้วในกระบวนการสโตแคสติก คือ

$$\frac{d}{dt}\alpha_1 = -\chi\alpha_s\alpha_i\alpha_2^+ + \mathscr{E}_1 - \gamma_1\alpha_1 + i\sqrt{\chi}\alpha_s\eta_A + \sqrt{2n_1+\chi|\alpha_s|^2}\eta_1, \tag{4.1.2a}$$

$$\frac{d}{dt}\alpha_2 = -\chi\alpha_s\alpha_i\alpha_1^+ + \mathscr{E}_2 - \gamma_2\alpha_2 + i\sqrt{\chi}\alpha_i\eta_A^+ + \sqrt{2n_2+\chi|\alpha_i|^2}\eta_2, \tag{4.1.2b}$$

$$\frac{d}{dt}\alpha_i = \chi\alpha_1\alpha_2\alpha_s^+ - \gamma_i\alpha_i + i\sqrt{\chi}\alpha_1\eta_B + \sqrt{2n_i+\chi|\alpha_i|^2}\eta_i, \tag{4.1.2c}$$

$$\frac{d}{dt}\alpha_s = \chi\alpha_1\alpha_2\alpha_i^+ - \gamma_s\alpha_s + i\sqrt{\chi}\alpha_2\eta_B^+ + \sqrt{2n_s+\chi|\alpha_2|^2}\eta_s, \tag{4.1.2d}$$

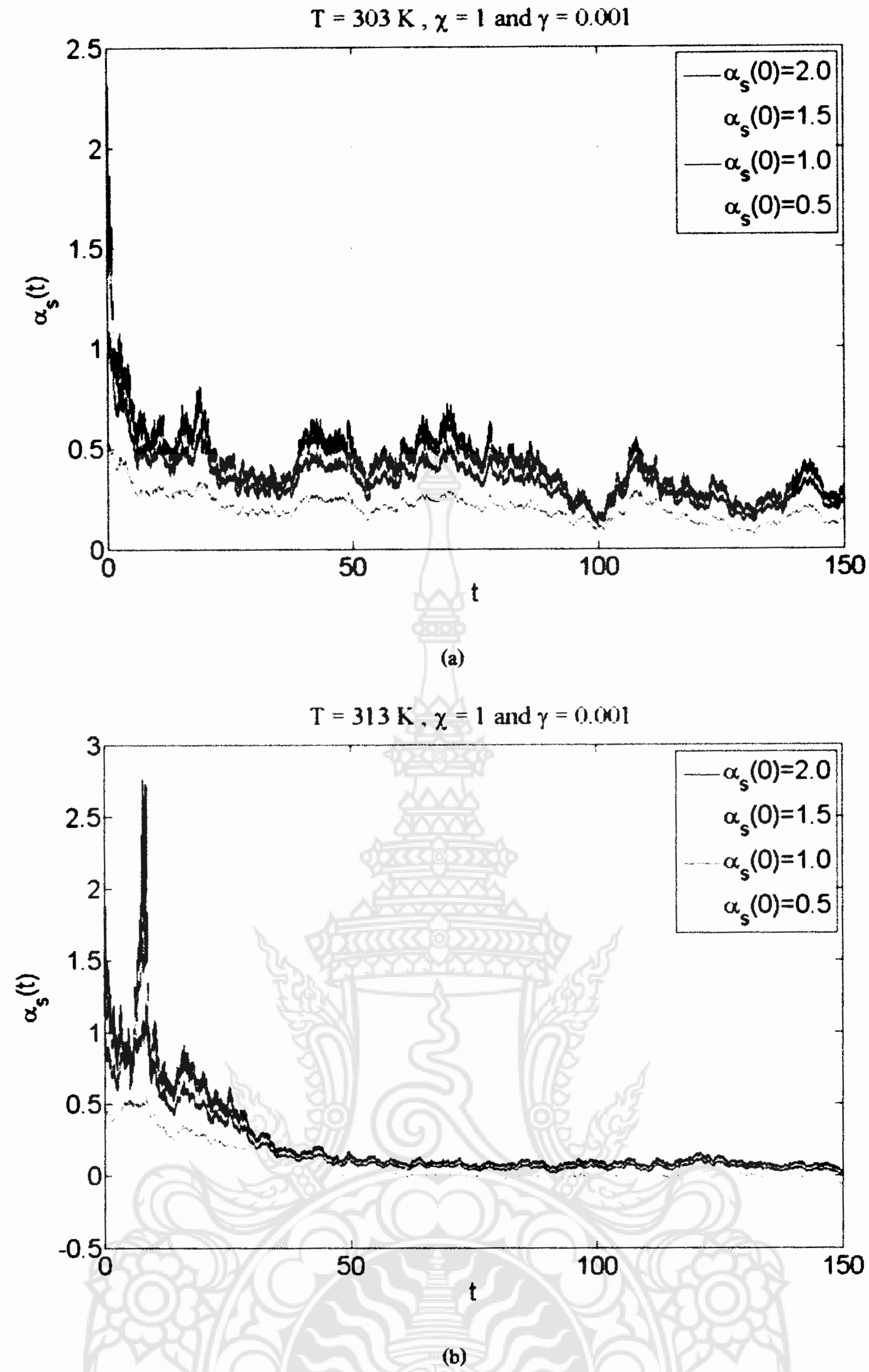
โดยที่สหสัมพันธ์ ของตัวแปรเชิงซ้อนของสัญญาณรบกวน(noise)เขียนอยู่ในรูป

$$\begin{aligned}\langle\eta_k\rangle &= \langle\eta_k^\dagger\rangle = 0,\\ \langle\eta_j(t)\eta_k(t')\rangle &= \langle\eta_j^+(t)\eta_k^+(t')\rangle = \delta_{jk}\delta(t-t').\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

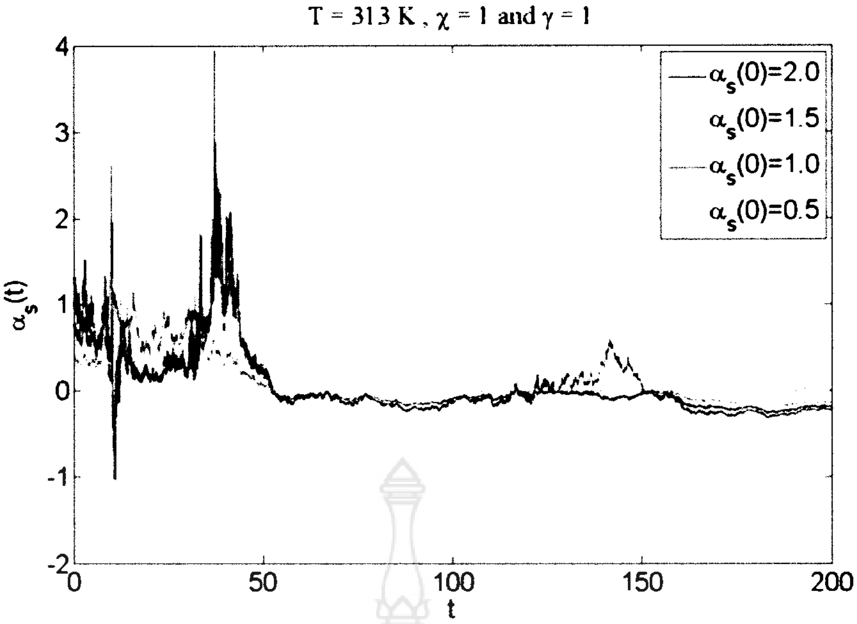
เมื่อ $j,k = 1,2,s,i$ ผลที่ตามมาเมื่อนำสมการแลงเกอแวงที่เกี่ยวกับสถานะของเอนแทงเกิลโฟตอน ρ_s ไปจำลองเพื่อพิจารณาความสัมพันธ์การวิวัฒน์ของสถานะตามเวลา t โดยใช้เงื่อนไขทางอุณหภูมิ T สัมประสิทธิ์ความไม่เป็นเชิงเส้นของเส้นใยแก้วนำแสง χ และค่าความแรงของอันตรกิริยาระหว่างโฟตอนและโมเลกุลของเส้นใยแก้วนำแสง (γ) เวลา t มีหน่วยเป็น วินาที

4.2 ผลการวิวัฒน์ของสถานะเอนแทงเกิลโฟตอน

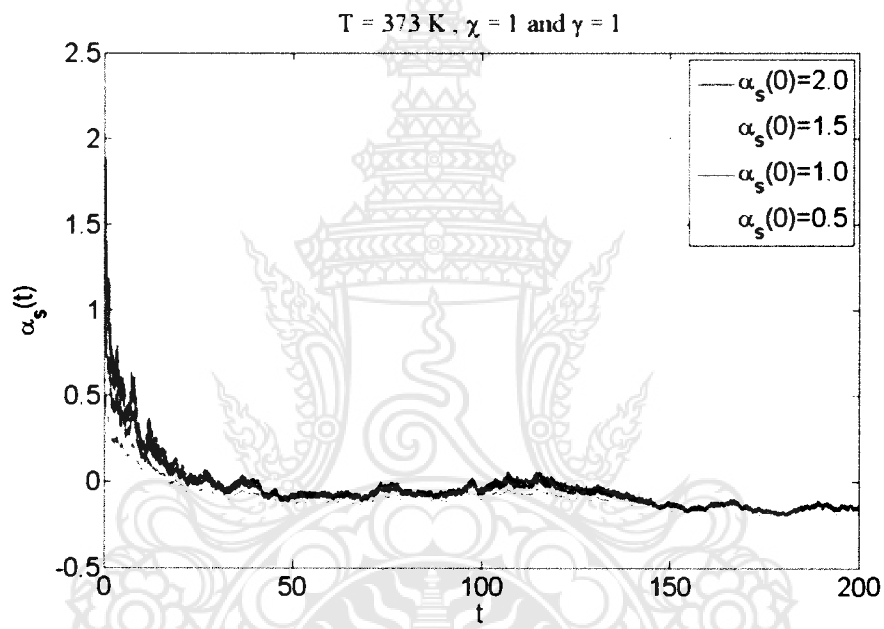
เมื่อนำสมการ(4.1.2) มาทำการจำลองสถานการณ์เพื่อศึกษาการวิวัฒน์ของสถานะของเอนแทงเกิลโฟตอนโดยเฉพาะโฟตอนสัญญาณโมด s ด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ทางด้านคณิตศาสตร์ พารามิเตอร์ที่เกี่ยวข้องต่างๆได้แก่ อุณหภูมิ T การตอบสนองต่อสนามไฟฟ้าของเส้นใยแก้วนำแสง χ และอัตราการแดมป์ของโฟตอนโมดสัญญาณ γ ผลของการจำลองสถานะการณ์แสดงดังกราฟ ดังต่อไปนี้



รูปที่ 4.1: แสดง การ วิวัฒน์ ตาม เวลา ของ สถานะ เอน แทง เกิลโฟ ตอน ของ โมด สัญญาณ s จาก ระบบสมการ(4.1.2) พบว่าผลจากอันตรกิริยาของสิ่งแวดล้อมมีผลให้อายุของมันมีลักษณะลดลง ค่าพารามิเตอร์ที่ถูกใช้คือ อุณหภูมิ $T = 303$ K, ค่าคงที่สัมประสิทธิ์ความไม่เป็นเชิงเส้นของเส้นใยแก้วนำแสง $\chi = 1$, และ ค่าคงที่ของการเข้าคู่ควบอันตรกิริยาโฟตอน-โมเลกุลซิลิกาออกไซด์ของเส้นใยแก้วนำแสง $\gamma = 1$ และ อุณหภูมิ $T = 313$ K ตามลำดับ



(a)

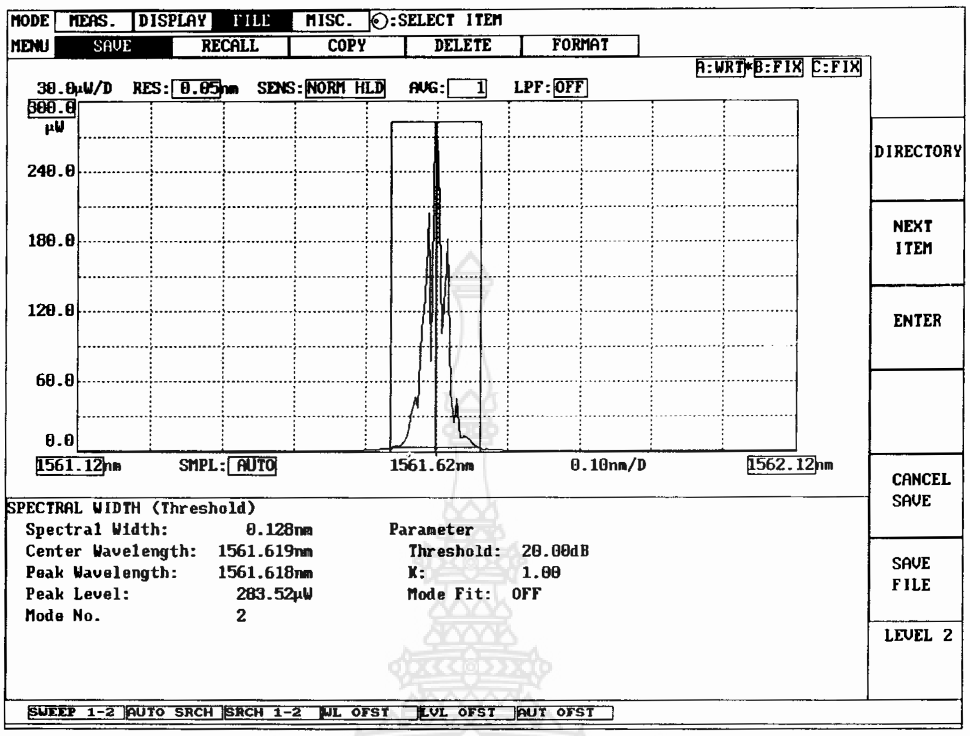


(b)

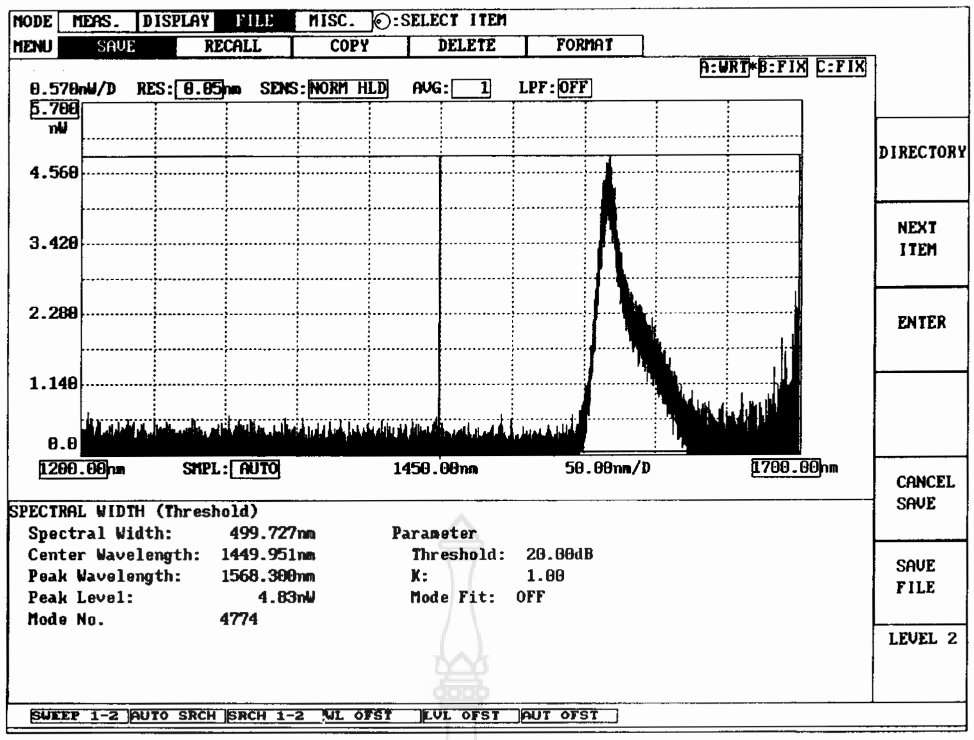
รูปที่ 4.2: แสดง การ วิวัฒน์ ตาม เวลา ของ สถานะ เอน แทง เกิลโฟ ตอน ของ โมด สัญญาณ s จาก ระบบสมการ(4.1.2) พบว่าผลจากอันตรกิริยาของสิ่งแวดล้อมมีผลให้อายุของมันมีลักษณะลดลง ค่าพารามิเตอร์ที่ถูกใช้คือ อุณหภูมิ $T = 313$ K, ค่าคงที่สัมประสิทธิ์ความไม่เป็นเชิงเส้นของเส้นใยแก้วนำแสง $\chi = 1$, และ ค่าคงที่ของการเข้าคู่ควบอันตรกิริยาโฟตอน-โมเลกุลซิลิกาออกไซด์ของเส้นใยแก้วนำแสง $\gamma = 1$ และ $T = 373$ K ตามลำดับ

4.3 ผลการวัดสัญญาณพัลส์ของแสงจากวงแหวนสั่นพ้องเส้นใยแก้วนำแสง

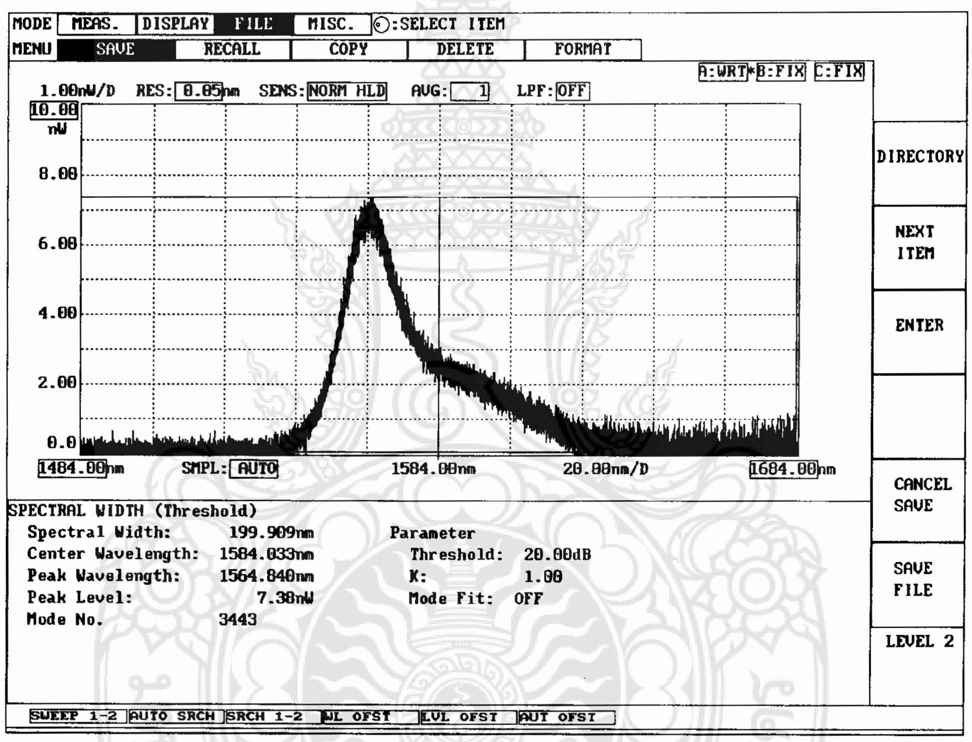
เมื่อจัดอุปกรณ์เพื่อผลิตเอนแทงเกิลโฟตอนจากระบบวงแหวนสั่นพ้องเส้นใยแก้วนำแสง ดังแสดงใน รูปที่ 3.1 สัญญาณที่ออกมาจากวงแหวนสั่นพ้องเส้นใยแก้วนำแสงหลังจากการกรองด้วย WDM ที่ตัวตรวจจับ D_1 และ D_2 ดังแสดงในรูปต่อไปนี้



รูปที่ 4.3: สัญญาณของเอนแทงเกิลโฟตอนที่ได้จากตัวตรวจรับ D_1 และ D_2 แสดงถึง การเกิดใหม่จากสัญญาณความถี่กลางหรือจากโมดปั๊ม มาเป็นโมดสัญญาณ s (ซ้าย) และ โมดนิ่งเฉย i (ขวา) รอบข้างสัญญาณปั๊ม p ตรงกลาง

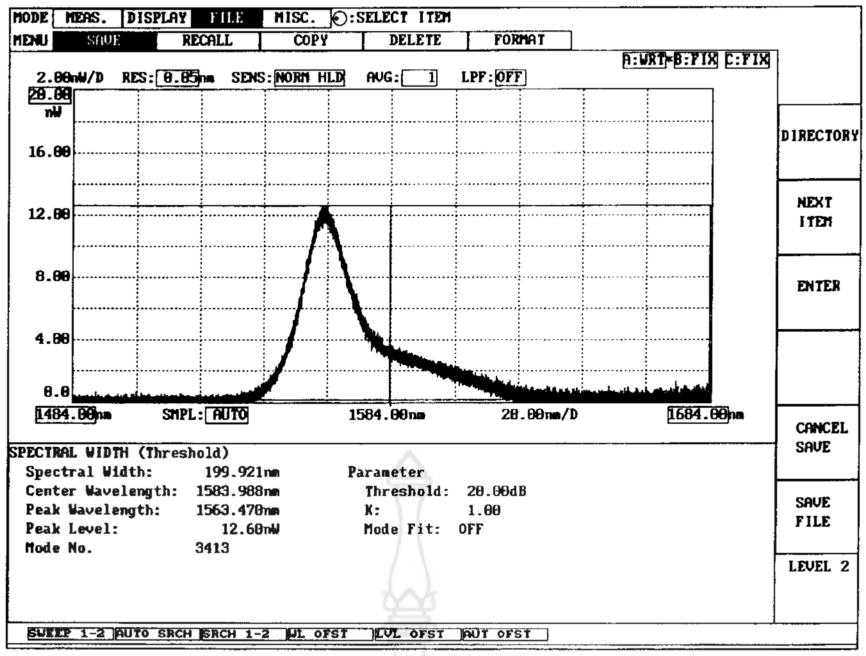


(a)

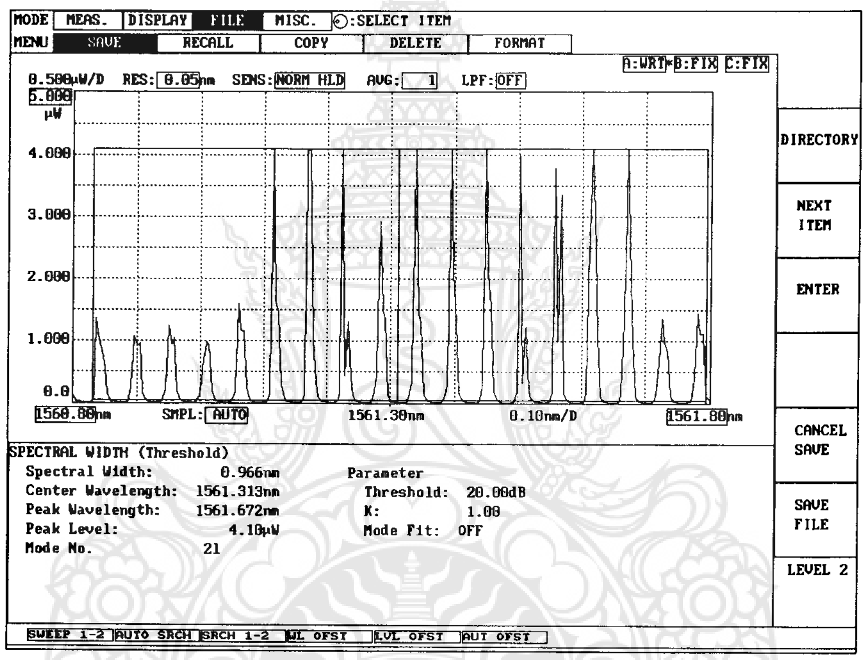


(b)

รูปที่ 4.4: สัญญาณของเอนแทงเกิลโฟตอนที่ได้จากตัวตรวจรับ D_1 และ D_2 แสดงถึง สัญญาณที่อันตรกิริยาระหว่างการควบกันเอนแทงเกิลโฟตอนกับแหล่งความร้อนมีมากเกินไปและเกิดสัญญาณรบกวนมากขึ้น ซึ่งมีสาเหตุมาจาก โฟตอนในโมดปั๊มมีความเข้มสูงแล้วถ่ายเทพลังงานให้แก่เส้นใยแก้วนำแสงและมีการปล่อยโฟตอนทุติยภูมิออกมาในรูปของสัญญาณพื้นหลัง เรียกว่าสัญญาณรบกวน



(a)

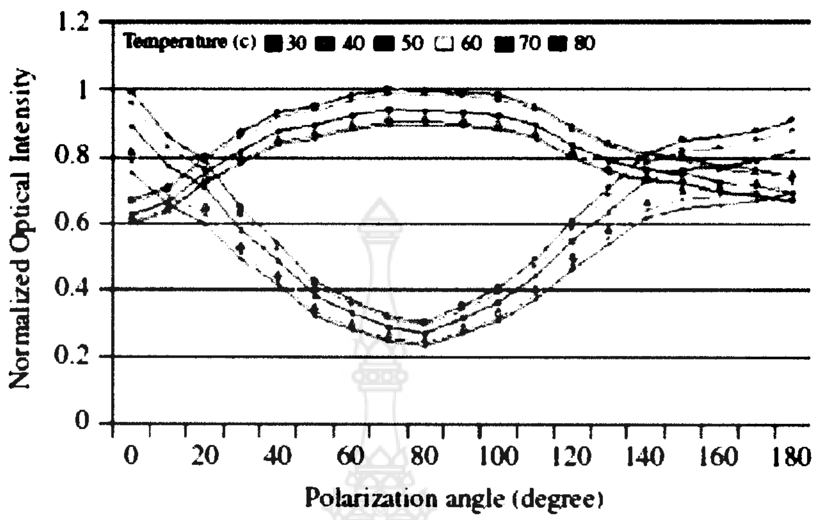


(b)

รูปที่ 4.5: สัญญาณของเอนแทงเกิลโฟตอนที่ได้จากตัวตรวจรับ D_1 และ D_2 รูป (a) แสดงถึง สัญญาณที่อันตรกิริยาระหว่างการควบกันเอนแทงเกิลโฟตอนกับแหล่งความร้อนมีมากเกินไปและเกิดสัญญาณรบกวนมากขึ้น รูป (b) แสดงถึงกรณีที่ความเข้มของแสงปั้มสูงมากๆกอรปกับอุณหภูมิสูงมากๆ ส่งผลให้สัญญาณรบกวนมีความเด่นเทียบเท่ากับสัญญาณของเอนแทงเกิลโฟตอน

4.4 ผลการวัดสัญญาณพัลส์โพลาไรซ์เอนแทงเกิลโฟตอนที่อุณหภูมิต่างๆ

เอนแทงเกิลโฟตอนที่เกิดจากกระบวนการโฟร์เวฟมิกซิง เมื่อทำการวัดมุมโพลาไรซ์ที่ทำระหว่างกันของโฟตอนโมดสัญญาณ s เทียบกับ โฟตอนโมดนิ่งเฉย i จากตัวตรวจรับ D_1 และ D_2 ที่อุณหภูมิ T ต่างๆ ในหน่วย °C ในสภาวะสมดุลความร้อน ได้ผลดังรูปต่อไปนี้



รูปที่ 4.6: แสดงการอัตราการนับเอนแทงเกิลโฟตอนที่มาถึงตัวรับรู้โดยเปรียบเทียบกันระหว่างสถานะโพลาไรซ์ของโมดสัญญาณ s และโมดนิ่งเฉย i จำแนกตามอุณหภูมิ T

บทที่ 5
สรุปผล อภิปรายและข้อเสนอแนะ

5.1 สรุปผล

ได้ศึกษากระบวนการ โฟร์เวฟมิกซิงในวงแหวนสั่นพ้องเส้นใยแก้วนำแสง เพื่อผลิตเอนแทงเกิลโฟตอน พร้อมใช้งานในการประยุกต์ทางด้านสารสนเทศเชิงควอนตัม การศึกษาเริ่มจากการสร้างแฮมิลโทเนียนทั้งใน กรณีของการปั๊มพัลส์แสงเลเซอร์ความเข้มสูงส่งเข้าไปกระตุ้นเนื้อสารหรือโมเลกุลซิลิกาออกไซด์ แฮมิลโทเนียนกรณีโฟร์เวฟมิกซิง และแฮมิลโทเนียนกรณีการเข้าควบกันระหว่างโฟตอนกับแหล่งความร้อนหรือโฟนอน เมื่อใช้ตัวแทนของโฟตอนตามหลักตัวแทนสถานะ พีบวก และใช้การประมาณแบบมาร์คอฟ-บอร์น พบว่าสมการควบคุมหลักได้ลดรูปมาเป็นสมการฟอกเกอร์แพลงค์ เมื่อใช้บรรทัดฐานเทคนิคการกระจายของแคร์เมอร์ - มอยัล จึงได้สมการแลงเกอแวงที่สมนัยกันและเป็นสมการที่อธิบายการวิวัฒน์ของสถานะตามเวลาของตัวดำเนินการของเอนแทงเกิลโฟตอน ซึ่งพบว่ามีสัญญาณรบกวนเกิดขึ้นต่อสัญญาณของเอนแทงเกิลโฟตอน จากสมการการวิวัฒน์ที่ได้ถูกนำมาจำลองสถานการณ์เพื่อให้ทราบผลของพารามิเตอร์ต่างๆที่เกี่ยวข้องกับการแผ่ของสถานะเอนแทงเกิลโฟตอนในเส้นใยแก้วนำแสง จากผลการทดลองสามารถยืนยันผลของอุณหภูมิที่แปรค่าจากสิ่งแวดล้อมที่มีต่ออันตรกิริยากับโฟตอนโดยที่สถานะโพลาไรซ์ของเอนแทงเกิลโฟตอนยังคงไว้ได้ในย่านการใช้งานตามอุณหภูมิจริงที่บริเวณผิวโลก

5.2 ข้อเสนอแนะ

ควรนำเอนแทงเกิลโฟตอนในโมดสถานะสัญญาณ s และโมดสถานะนิ่งเฉย i ไปทดสอบการใช้งานทางด้านสารสนเทศเชิงควอนตัม เช่น คริปโตกราฟี เทเลพอร์เตชัน เป็นต้น เพื่อหาประสิทธิภาพและปรับปรุงความแรงของสัญญาณของเอนแทงเกิลโฟตอนให้เด่นกว่าสัญญาณรบกวนให้ดียิ่งขึ้น

บรรณานุกรม

[1] Charles H. Bennett and David P. DiVincenzo, Quantum information and computation, Nature 404, 247 (2000).

[2] P. D. Drummond and J. F. Corney, Quantum noise in optical fibers I: stochastic equations, J. Opt. Soc. Am. B, Vol. 18 Issue 2, pp.139-152 (2001).

[3] Xiaoying Li, Paul L. Voss, Jay E. Sharping, and Prem Kumar, Optical-fiber source of polarization-entangled photons in the 1550 nm telecom Band, Phys. Rev. Lett. 94, 053601 (2005).

[4] Hiroki Takesue, Kyo Inoue, Generation of 1.5 μm band time-bin entanglement using spontaneous fiber four-wave mixing, Phys. Rev. A 72, 041804(R) (2005).

[5] J. Brendel, N. Gisin, W. Tittel, and H. Zbinden, Pulsed energy-time entangled twin-photon source for quantum communication, Phys. Rev. Lett. 82, 2594 (1999).

[6] Christoph Simon and Jean-Philipe Poizat, Creating single time–bin entangled photon pairs, Phys. Rev. Lett. 94, 030502 (2005).

[7] Roy J. Glauber, The quantum theory of optical coherence, Phys. Rev. 130, 2529 (1963).

[8] Roy J. Glauber, Coherent and Incoherent states of the radiation field, Phys. Rev. 131, 2766 (1963).

[9] P. D. Drummond and C. W. Gardiner, Generalized P-representations in quantum optics, J. Phys. A 13, (1980)2353.

[10] Yanhua Shih, Entangled Photons, IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics, Vol. 9 No.6, 1455 (2003).

[11] Govin P. Agrawal, Nonlinear Fiber Optics, 4th edition, Academic Press, Burlington, America (2007).

[12] Jun Chen, Xiaoying Li, and Prem Kumar, Two-photon-state generation via four- wave mixing in optical fibers, Phys. Rev. A 72, 033801 (2005).

ประวัติผู้วิจัย

ดร.ชัชวาล ศรีภักดี สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาตรีจากมหาวิทยาลัยราชภัฏนครราชสีมา วุฒิการศึกษา ค.บ (ฟิสิกส์) พ.ศ. 2536 ระดับปริญญาโทจากจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย วุฒิการศึกษา วท.ม(ฟิสิกส์) พ.ศ. 2540 และระดับปริญญาเอกจากสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง วุฒิการศึกษา ปร.ด(ฟิสิกส์ประยุกต์) พ.ศ. 2550 ปัจจุบันรับราชการตำแหน่งอาจารย์ สังกัด กลุ่มวิชาฟิสิกส์ สาขาวิชาวิทยาศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนคร ดร.ชัชวาล ศรีภักดี มีความสนใจในหัวข้อการวิจัยทางด้านฟิสิกส์เกี่ยวกับ สารสนเทศเชิงควอนตัม ทัศนศาสตร์เชิงควอนตัม โดยมีผลงานวิจัยได้รับการตีพิมพ์ระดับนานาชาติแล้วกว่า 6 เรื่อง