



สโตแคสติกเพื่อวิเคราะห์สถานะบีบอัดของแสงในวงแหวนสั่นพ้องแพนด้า  
Stochastic Analysis of Squeezed State of Light within a PANDA Ring  
Resonator

ดร. ชัชวาล ศรีภักดี

งานวิจัยนี้ได้รับทุนสนับสนุนจากงบประมาณเงินผลประโยชน์ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2559  
คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนคร



Stochastic Analysis of Squeezed State of Light within a PANDA Ring  
Resonator



Chatchawal Sripakdee

This research is funded by Faculty of Science and Technology  
Rajamangala University of Technology Phra Nakhon  
Year 2016

ชื่อเรื่อง : สโตนแคสติงเพื่อวิเคราะห์สถานะบีบอัดของแสงในวงแหวนสั้นพองแพนด้า

ผู้วิจัย : ดร. ชัชวาล ศรีภักดี

ปีที่ทำการวิจัย : 2559

### บทคัดย่อ

ได้ประยุกต์ใช้สโตนแคสติงเพื่อวิเคราะห์การแผ่ของโฟตอนในสถานะเกี่ยวพันกันในวงแหวนสั้นพองแพนด้า โดยใช้ตัวแทนของโฟตอนอยู่ในรูปแบบของสถานะบีบอัด และยังได้ศึกษาการผลิตโฟตอนสถานะเกี่ยวพันกันจากกระบวนการผสมคลื่นแสงสี่แบบเพื่อการประยุกต์ใช้ในระบบสารสนเทศเชิงควอนตัม และยังได้ศึกษาสัญญาณรบกวนที่เกิดจากผลของอนุภูมิที่เกิดขึ้นในระบบด้วย อีกทั้งยังได้เสนอสมการความสัมพันธ์สเปกตรัมในรูปแบบเชิงวิเคราะห์ ผลที่ได้พบว่ามีความเหมาะสมที่จะได้นำวงแหวนดังกล่าวไปออกแบบเพื่อบรรจุเป็นชิ้นส่วนของหน่วยประมวลผลระดับควอนตัมของควอนตัมคอมพิวเตอร์ได้

คำสำคัญ: สโตนแคสติง , สถานะบีบอัด , วงแหวนสั้นพองแพนด้า , การดักจับด้วยแสง

Title : Stochastic Analysis of Squeezed State of Light within a  
PANDA Ring Resonator

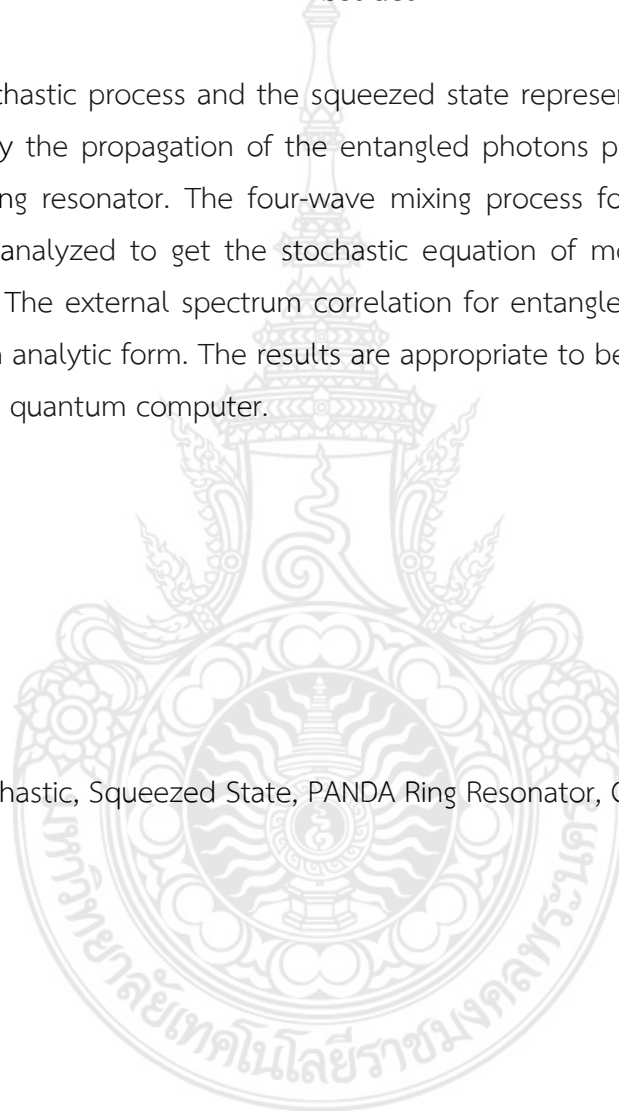
Researcher : Dr. Chatchawal Sripakdee

Year of research : 2016

### Abstract

The stochastic process and the squeezed state representation of photons was applied to study the propagation of the entangled photons produced in a nonlinear micro PANDA ring resonator. The four-wave mixing process for generating entangled photon is also analyzed to get the stochastic equation of motion of the entangled photon states. The external spectrum correlation for entangled photon generation is also achieved in analytic form. The results are appropriate to be a quantum processing device to use in quantum computer.

Keywords: Stochastic, Squeezed State, PANDA Ring Resonator, Optical Tweezing



## กิตติกรรมประกาศ

รายงานการวิจัยฉบับนี้สำเร็จลุล่วงไปได้ เนื่องจากผู้วิจัยได้รับความกรุณาช่วยเหลืออย่างยิ่งจากบุคคลที่ให้การสนับสนุนในด้านต่างๆ ดังนี้

ขอขอบคุณ คุณสุมาลี จันทร์หวัทนา คุณปณิก เจนทรทิน ในการจัดพิมพ์ต้นฉบับและจัดทำรายงานและรูปเล่มงานวิจัย

ขอขอบคุณ นิสากร น่วมศรีนวล ที่ได้ช่วยออกแบบระบบและทดสอบเครื่องมือวัดสัญญาณต่างๆที่เกี่ยวข้อง

สุดท้ายขอขอบคุณคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนคร ที่สนับสนุนเงินทุนการวิจัย

ดร. ชัชวาล ศรีภักดี



# สารบัญ

	หน้า
บทคัดย่อภาษาไทย	A
บทคัดย่อภาษาอังกฤษ	B
กิตติกรรมประกาศ	C
สารบัญตาราง	E
<b>บทที่ 1 บทนำ</b>	<b>1</b>
1.1 ความเป็นมาและความสำคัญของปัญหา	1
1.2 วัตถุประสงค์ของโครงการวิจัย	1
1.3 ขอบเขตของโครงการวิจัย	1
1.4 ทฤษฎี สมมติฐาน และกรอบแนวความคิดของโครงการวิจัย	1
1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ	1
1.6 แผนการถ่ายทอดเทคโนโลยีหรือผลการวิจัยสู่กลุ่มเป้าหมาย	1
<b>บทที่ 2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง</b>	<b>3</b>
2.1 บทนำ	3
2.2 ทฤษฎีควอนตัมของแสงเบื้องต้น	4
2.3 วงแหวนสั่นพ้องแพนด้า	6
2.4 กระบวนการสโตแคสติก	7
2.4.1 มโนทัศน์เกี่ยวกับความน่าจะเป็น	7
2.4.2 กระบวนการสโตแคสติก (Stochastic Process)	8
2.5 สมการแชปแมน-โคลโมโกรอฟ(Chapman-Kolmogorov Equation)	9
2.6 สมการพอกเกอร์-แพลงค์	11
2.6.1 กระบวนการของไวเนอร์	12
2.6.2 คุณสมบัติทั่วไปของสมการพอกเกอร์-แพลงค์	14
2.7 สมการเชิงอนุพันธ์สโตแคสติก	14
2.8 แคลคูลัสของอิโตและสตราโตโนวิช	16
2.9 สูตรของอิโต	18
<b>บทที่ 3 วิธีดำเนินการวิจัย</b>	<b>20</b>
3.1 การสร้างสถานะสุญญากาศบีบอัด	20
3.1.1 สถานะบีบอัด	20
3.1.2 ทฤษฎีสนามไฟฟ้าโมดเดียว	20
3.1.3 สถานะสุญญากาศโมดเดียว	21
3.1.4 สถานะบีบอัดแบบโมดเดียว	22

	3.1.5 ทฤษฎีสนามไฟฟ้าแบบสองโมด	22
	3.1.6 สถานะบีบอัดแบบสองโมด	23
	3.2 พลศาสตร์ของสนามไฟฟ้าในทอวงแหวนสั้นพ้องแผนด้า	24
	3.3 การประยุกต์วิธีโฮโมดาวยแบบสมดุกับการสั้นแกว่งเฉพาะที่โมโนโครมาติก	24
	3.4 การเหลื่อมทับกันเชิงปริภูมิของลำแสงสัญญาณกับตัวสั้นเฉพาะที่	27
	3.5 การสร้างสถานะสุญญากาศบีบอัดด้วยวิธีเรโซแนนท์	30
	3.5.1 โครงสร้างการแผ่ของคลื่นในตัวกลางไม่เชิงเส้น	31
	3.5.2 การผลิตฮาร์มอนิกเชิงแสงลำดับที่ 2	30
	3.5.3 การเทียบเฟสเสมือน	32
	3.5.4 เงื่อนไขที่ดีที่สุดในการโพกัสลำแสงลงใส่ผลึกที่ไม่เป็นเชิงเส้น	33
	3.6 แอมิลโตเนียนของระบบ	33
	3.7 สหสัมพันธ์การบีบอัดภายนอก	35
<b>บทที่ 4</b>	<b>ผลการวิเคราะห์ข้อมูล</b>	<b>36</b>
	4.1 ผลการวิเคราะห์สมการเชิงตัวเลข	36
<b>บทที่ 5</b>	<b>สรุป อภิปรายผลการวิจัย และข้อเสนอแนะ</b>	<b>39</b>
	5.1 สรุปผล	39
	5.2 ข้อเสนอแนะ	39
<b>บรรณานุกรม</b>		<b>40</b>
<b>ประวัติผู้วิจัย</b>		<b>41</b>



## บัญชีภาพประกอบ

รูปที่		หน้า
2.1	แสดงวงจร PANDA Ring Resonator	6
3.1	แสดงแผนภาพของเครื่องมือโฮโมตาย แสงตัวสั้นเฉพาะที่อยู่ในสถานะโคฮีเรนต์แบบโมดเดี่ยว ค่ากำลังของความต่างกระแสไฟฟ้าถูกวัดโดยเครื่องวิเคราะห์สเปกตรัม	24
3.2	ความไม่อิสระของกำลังที่ปกติแล้วที่ขึ้นกับมุมเฟสของการสั้นเฉพาะที่มีค่าพารามิเตอร์บีบอัด $r = 0.3$ กำลังของสัญญาณรบกวนที่เป็นปกติแล้วมีหน่วยเป็นเดซิเบล (dB) ซึ่งได้มาจากสูตร	27
3.3	กราฟความสัมพันธ์ระหว่างสเปกตรัมกำลังซึ่งขึ้นกับมุมเฟสของการสั้นเฉพาะที่มีค่าพารามิเตอร์การบีบอัด $r = 0.3$ สภาพมองเห็นได้ $\zeta = 0.95$ และการสูญเสีย $L = 0.2$	28
3.4	ไดอะแกรมการสูญเสีย สถานะสัญญาณการบีบอัด -3 dB มีค่าการสูญเสีย $L = 0.5$ หลังจากการดูดกลืนระดับการบีบอัดที่สังเกตได้ลดลงเป็น -1.2 dB	29
3.5	แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสเปกตรัมกำลังและประสิทธิภาพการตรวจจับ $\zeta$ โดยมีค่าพารามิเตอร์การบีบอัด $r = 3$	30
4.1	แสดงการวิวัฒนาการตามเวลาของตัวดำเนินการโฟตอนในโมดสัญญาณ $\alpha_s(t)$ ณ เวลา $t$ ใดๆ	36
4.2	การกระจายความหนาแน่นความน่าจะเป็นของตัวดำเนินการ $\alpha_s$ มีค่าที่ยอมรับได้สำหรับค่าสังเกตต่างๆ	36
4.3	เส้นวิถีของสถานะตัวดำเนินการสถานะสัญญาณโฟตอน $\alpha_s$ ทั้งส่วนจริงและส่วนจินตภาพ ที่สอดคล้องกับสมการ (121)	37
4.4	ความแปรปรวนร่วม $V^{inf}$ ของการวิวัฒนาการสถานะของสัญญาณ $\alpha_s$ มีค่าน้อยกว่าหนึ่งซึ่งสอดคล้องกับสมการของเบลล์	37
4.5	การขึ้นกับเวลาการวัดสัญญาณรบกวนของพัลส์ที่แห่เข้าไปเพื่อเป็นตัวอย่างตรวจสอบ โดยเส้นกราฟเส้นกลาง คือ พัลส์อ้างอิง ส่วนบนและเส้นล่างเป็นของพัลส์โมดสัญญาณและโมดนิ่งเฉยตามลำดับ	38
4.6	กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง $V(\Omega)$ และ $\Omega$ ตามสมการ (233) โดยที่ $g^2 = 0.001$ , $\kappa = 0.03$	38



# บทที่ 1

## บทนำ

### 1.1 ความสำคัญและที่มาของปัญหาที่ทำการวิจัย

วงแหวนสั่นพ้องแพนด้าว่าเป็นสิ่งประดิษฐ์ที่มีประโยชน์มากทั้งในด้านการสื่อสารระยะไกล ด้วยระบบเส้นใยแก้วนำแสง และด้านเทคโนโลยีการประดิษฐ์ตัวตรวจรู้เพื่อประยุกต์ใช้ในการตรวจจับอะตอมหรือโมเลกุลของสสารได้อย่างแม่นยำยาวนานยิ่ง และเป็นวิธีการสร้างสถานะควิบิตจากอะตอมที่ตีเทียมอีกวิธีหนึ่งเพื่อนำไปใช้ในการประมวลผลในซีพียูของควอนตัมคอมพิวเตอร์และเทคโนโลยีการสื่อสารเชิงควอนตัมในอนาคตต่อไปได้อย่างคุ้มค่ายิ่ง การเพิ่มประสิทธิภาพการตรวจจับอะตอมหรือโมเลกุลของวงแหวนสั่นพ้องแพนด้าจึงมีความสำคัญและจำเป็นอย่างยิ่ง เพราะเป็นเครื่องมือที่มีต้นทุนต่ำแต่มีประสิทธิภาพในการใช้งานสูงมาก พกพาสะดวก และมีขนาดเล็ก ดังนั้น ประเด็นหลักของการเพิ่มประสิทธิภาพการตรวจจับอะตอม คือ การเพิ่มอัตราการผลิตขึ้นของโฟตอนโมดของห้องการสะท้อนแสง (WGM) หรือกล่าวอีกนัยหนึ่ง คือ การเพิ่มขึ้นของอัตราการเกิดของอันตรกิริยาระหว่างโฟตอนโมดของสัญญาณขาเข้าและโมเลกุลที่ไม่ตอบสนองต่อสนามไฟฟ้าแบบเชิงเส้นของวงแหวนสั่นพ้องแพนด้านั่นเอง ดังนั้น สถานะโฟตอนจากกระบวนการนี้จึงสามารถอธิบายด้วยสถานะบีบอัดได้ ซึ่งเกิดขึ้นร่วมกับสมบัติทางจุลภาคของเส้นใยแก้วนำแสง พฤติกรรมที่โฟตอนแสดงออกสอดคล้องกับทฤษฎีทางสถิติที่ขึ้นกับเวลา ดังนั้น วิธีการของสโตแคสติกจึงเหมาะที่จะนำมาประยุกต์ใช้ได้กับกรณีศึกษาเหล่านี้

### 1.2 วัตถุประสงค์ของโครงการวิจัย

เพื่อศึกษาสถานะบีบอัดของโฟตอนในวงแหวนสั่นพ้องแพนด้าด้วยการประยุกต์ใช้วิธีการสโตแคสติก

### 1.3 ขอบเขตของโครงการวิจัย

1.3.1 ศึกษาเฉพาะสถานะบีบอัดของโฟตอนเท่านั้น เพราะเป็นสถานะที่เกิดจากอันตรกิริยาระหว่างโฟตอนและตัวกลางไม่เชิงเส้นนอนพาราเมตริก  $\chi^{(3)}$

1.3.2 ศึกษาวงแหวนสั่นพ้องแพนด้า เพียง 1 คู่

### 1.4 ทฤษฎี สมมติฐานและกรอบแนวความคิดของโครงการวิจัย

สมมติฐานของการวิจัย คือ วงแหวนสั่นพ้องแพนด้าให้โมด WGM ที่มีเกรเดียนท์ ของสนามไฟฟ้าที่มีขนาดเข้มข้นและสามารถตรวจจับอนุภาคที่มีโพลาริเซชันได้

### 1.5 ประโยชน์ที่คาดว่าจะได้รับ

ด้านวิชาการ ใช้ประกอบการเรียนการสอน ต่อยอดเชิงวิจัย

### 1.6 แผนการถ่ายทอดเทคโนโลยีหรือผลการวิจัยสู่กลุ่มเป้าหมาย

1.6.1 เผยแพร่ ตีพิมพ์ผลงานการวิจัยในวารสารวิชาการ

1.6.2 สอนบรรยายให้แก่นักศึกษา มทร.พระนคร หรือ สถาบันอุดมศึกษาอื่น หรือภาคอุตสาหกรรม  
ที่ให้ความสนใจ



## บทที่ 2

### เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

#### 2.1 บทนำ

ถึงแม้ว่า ดิแรก (P. A. M. Dirac) ได้ค้นพบทฤษฎีควอนตัมของการแผ่รังสีแล้วก็ตาม แต่การอธิบายปรากฏการณ์ต่างๆของแสงส่วนใหญ่ในขณะนั้นยังอยู่ในกรอบของทฤษฎีกึ่งแผนเดิม ซึ่งแสงประพฤติตัวตามแบบของทฤษฎีสนามไฟฟ้าแผนเดิม ต่อมา หยวน (H. P. Yuen) ได้นำแนวคิดของสถานะบีบอัดเข้ามาใช้และสถานะดังกล่าวสามารถผลิตขึ้นมาได้โดยใช้กระบวนการขยายสัญญาณแบบพาราเมตริกซ์สถานะซ้ำซ้อน สถานะบีบอัดจึงเป็นอีกรูปแบบหนึ่งของแสงที่แสดงให้เห็นว่าสถานะของแสงไม่ใช่สถานะแบบดั้งเดิมอีกต่อไป เนื่องจากสถานะบีบอัดมีประโยชน์ทั้งต่อการประยุกต์ใช้ในการสื่อสารเชิงแสงและการตรวจวัดการแผ่รังสีความโน้มถ่วงเป็นอย่างมาก ดังนั้น จึงมีการทดลองจำนวนมากพยายามผลิตสถานะบีบอัด และในปี ค.ศ. 1986 สลัชเชอร์ (R. E. Slusher) และคณะ ประสบความสำเร็จในการผลิตสถานะบีบอัดโดยใช้การขยายสัญญาณแบบพาราเมตริกซ์โดยใช้ตายเลเซอร์ ข้อดีของสถานะบีบอัด คือ การมีสัญญาณรบกวนในควอดเรเจอร์หนึ่งของสนามไฟฟ้าต่ำกว่าสถานะสุญญากาศมาก โดยในปี ค.ศ. 2006 ก็สามารถผลิตระดับความเข้มการบีบอัดเพิ่มขึ้นได้ถึง 7 dB จากการสั้นแวงแบบพาราเมตริกซ์ย่อยของการกระตุ้นต่ำสุด

สถานะบีบอัดสุญญากาศได้แสดงภาพลักษณ์ของแสงเชิงควอนตัมออกมาจำนวนมาก และลำแสงสหสัมพันธ์แบบ EPR ก็ถูกผลิตขึ้นตามมาได้อย่างสำเร็จโดยอาศัยการล้อมซ้อนทับกันของลำแสงสองลำซึ่งเกิดจากการกระตุ้นผลึกไม่เชิงเส้น โดยต่อมอลำแสง EPR ได้เข้ามามีบทบาทอย่างมากในการเคลื่อนย้ายสถานะทางควอนตัม ในปี ค.ศ. 1998 ฟุรุซาวา (A. Furusawa) และคณะ ประสบผลสำเร็จอย่างงดงามในการทดลองเพื่ออธิบายการเคลื่อนย้ายสถานะควอนตัมของแสง เช่นเดียวกันกับกลุ่มของบรอนสไตน์ (S. L. Braunstein) ก็ได้พัฒนาทฤษฎีสารสนเทศเชิงควอนตัมของตัวแปรต่อเนื่องขึ้นมาซึ่งสถานะบีบอัดสุญญากาศถูกใช้งานเพื่อเป็นตัวนำพาข้อมูลสารสนเทศระหว่างผู้รับและผู้ส่ง

คุณสมบัติที่สำคัญอย่างหนึ่งของแสงเลเซอร์ คือ ความมีระเบียบแบบอาพันธ์ซึ่งมักใช้เป็นตัวกลางการประยุกต์ใช้ที่สำคัญ คือ เพื่อให้เกิดการสะท้อนของโฟตอนหรือโฟตอนเอ็คโค การเตรียมสารไดโอดีเลกทริกโม่เมนต์ที่มีความพร้อมเพรียงสูงสำหรับสารทั่วไปทำได้โดยยิงพัลส์แรกของแสงเลเซอร์ใส่สารเพื่อทำให้เกิดการเปลี่ยนเฟสหลังจากนั้นยิงพัลส์เลเซอร์ชุดที่สองตามมาแล้วสารก็เกิดการปลดปล่อยเอ็คโคโฟตอนออกมา ซึ่งแนวคิดนี้ได้มาจากสปินเอ็คโคในแมกนีโตเรโซแนนซ์ ซึ่งเกี่ยวข้องกับ การเกิดความพร้อมเพรียงของสปินในสนามแม่เหล็ก สมการบล็อกเชิงแสงแสดงความสมนัยระหว่างไดโพลของอะตอมที่เกิดจากการยิงลำแสงเลเซอร์เข้าไปเหนี่ยวนำ และการกระตุ้นการเหนี่ยวนำสปินโดยสนามแม่เหล็ก

## 2.2 ทฤษฎีควอนตัมของแสงเบื้องต้น

นักฟิสิกส์ชาวอังกฤษ ชื่อ เจมส์ เคลิร์ก แมกซ์เวลล์ (James Clerk Maxwell) ค.ศ. 1831–1879 เป็นบุคคลคนแรกที่ทำนายการมีอยู่ของสมการคลื่นสนามแม่เหล็กไฟฟ้าในสุญญากาศ ณ ตำแหน่ง  $\mathbf{r} = (x, y, z)$  และ เวลา  $t$  โดยเขียนได้ว่า

$$\frac{\partial^2}{\partial \mathbf{r}^2} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (1)$$

โดยที่

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{r}, t) + \mathbf{A}^{(-)}(\mathbf{r}, t) \quad (2)$$

เรียกว่า ศักย์เวกเตอร์ (Vector Potential) โดยที่  $\mathbf{A}^{(+)}(\mathbf{r}, t) = (\mathbf{A}^{(-)}(\mathbf{r}, t))^*$  โดย สนามไฟฟ้า  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  มีความสัมพันธ์กับ ศักย์เวกเตอร์  $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$  คือ

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (3)$$

สนามแม่เหล็ก  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  มีความสัมพันธ์กับ ศักย์เวกเตอร์ คือ

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mu_0 \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) \quad (4)$$

สมการ (1) มีผลเฉลยในรูป

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \sum_k \left( \frac{\hbar}{2\omega_k \epsilon_0} \right)^{1/2} [\hat{a}_k \mathbf{u}_k(\mathbf{r}) e^{-i\omega_k t} + \hat{a}_k^\dagger \mathbf{u}_k^*(\mathbf{r}) e^{i\omega_k t}]. \quad (5)$$

เมื่อความสัมพันธ์การสลับที่ของตัวดำเนินการโบนอนของโฟตอน คือ

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}^\dagger] = \delta_{kk'}, \quad (6)$$

$$[\hat{a}_k, \hat{a}_{k'}] = [\hat{a}_k^\dagger, \hat{a}_{k'}^\dagger] = 0 \quad (7)$$

และ

$$\mathbf{u}_k(\mathbf{r}) = \frac{1}{L^{3/2}} \hat{\mathbf{e}}^{(\lambda)} \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) \quad (8)$$

โดยที่ความสัมพันธ์เชิงตั้งฉากของ  $\mathbf{u}_k(\mathbf{r})$  คือ

$$\int_V \mathbf{u}_k^*(\mathbf{r}) \mathbf{u}_{k'}(\mathbf{r}) d\mathbf{r} = \delta_{kk'} \quad (9)$$

สัญลักษณ์  $\hat{\mathbf{e}}^{(\lambda)} = |H\rangle, |V\rangle$  ทางขวามือของ สมการ (8) แสดงสถานะโพลาไรซ์ที่ตั้งฉากกัน (orthonormal) ของโฟตอนอนุภาคหนึ่ง ซึ่งมีอยู่สองสถานะเช่นเดียวกับกรณีของสถานะสปินของอิเล็กตรอนอนุภาคหนึ่ง กล่าวคือ  $|H\rangle$  ใช้แทนเวกเตอร์สถานะโพลาไรซ์ของโฟตอนในแนวตั้ง และ  $|V\rangle$  แทนเวกเตอร์สถานะโพลาไรซ์ของโฟตอนในแนวตั้ง

ตัวดำเนินการพลังงานรวมหรือแฮมิลโทเนียนของสนามแม่เหล็กไฟฟ้าอยู่ในรูป

$$\hat{\mathcal{H}} = \frac{1}{2} \int (\epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \mu_0 \mathbf{H}^2) d\mathbf{r} \quad (10)$$

จากผลเฉลยตามสมการ (5) เมื่อแทนค่าสนามไฟฟ้า  $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$  จากสมการ (3) และสนามแม่เหล็ก  $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$  จากสมการ (4) ลงในสมการ (10) ดังนั้น ตัวดำเนินการแฮมิลโทเนียน  $\hat{\mathcal{H}}$  จึงเขียนใหม่ได้เป็น

$$\hat{H} = \sum_k \hbar \omega_k \left( \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k + \frac{1}{2} \right) \quad (11)$$

ซึ่งตรงกับรูปแบบของตัวดำเนินการพลังงานของการสั่นแกว่งแบบฮาร์มอนิกที่คุ้นเคยกันดีในกลศาสตร์ควอนตัมนั่นเอง จากเหตุผลนี้จึงทำให้ทราบว่า สถานะของโฟตอนสามารถอธิบายได้ใน 3 รูปแบบ คือ

### 2.2.1 สถานะฟอคหรือสถานะเชิงตัวเลข (Fock or Numer State)

สถานะแบบนี้มีเวกเตอร์เจาะจงและค่าเจาะจงที่สอดคล้องกัน คือ

$$\hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k |n_k\rangle = n_k |n_k\rangle \quad (12)$$

โดยที่  $n_k = 1, 2, 3, \dots, \infty$  และ

$$\langle n_k | m_k \rangle = \delta_{mn} \quad (13)$$

และการดำเนินการของตัวดำเนินการทำลายต่อสถานะสุญญากาศ (vacuum state) ให้ค่าเจาะจง คือ

$$\hat{a}_k |0\rangle = 0 \quad (14)$$

ดังนั้น จึงเขียนสถานะเชิงตัวเลขใดๆให้อยู่ในสถานะสุญญากาศได้เป็น

$$|n_k\rangle = \frac{(\hat{a}_k^\dagger)^{n_k}}{(n_k!)^{1/2}} |0\rangle \quad (15)$$

และมีความสัมพันธ์บริบูรณ์ เป็น

$$\sum_{n_k=0}^{\infty} |n_k\rangle \langle n_k| = 1 \quad (16)$$

### 2.2.2 สถานะอาพันธ์ (Coherent States)

เวกเตอร์เคทของสถานะนี้เขียนอยู่ในรูป

$$|\alpha\rangle = \hat{D}(\alpha) |0\rangle \quad (17)$$

โดยที่ตัวดำเนินการกระจัด

$$\hat{D}(\alpha) = \exp(\alpha \hat{a}^\dagger - \alpha^* \hat{a}) \quad (18)$$

โดยที่  $\alpha, \alpha^*$  เป็นจำนวนเชิงซ้อนและสังยุคของมันตามลำดับ ค่าเจาะจงสถานะอาพันธ์ คือ

$$\hat{a} |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle \quad (19)$$

หรือเขียนในรูปเวกเตอร์เคทที่สัมพันธ์กับสถานะจำนวนได้เป็น

$$|\alpha\rangle = \exp(-|\alpha|^2/2) \sum \frac{\alpha^n}{(n!)^{1/2}} |n\rangle \quad (20)$$

### 2.2.3 สถานะบีบอัด (Squeezed states)

สถานะบีบอัดหาได้จากการบีบอัดสถานะอาพันธ์ โดยใช้ตัวดำเนินการบีบอัด  $\hat{S}(\zeta)$  ดังสมการ

$$|\alpha, \zeta\rangle = \hat{D}(\alpha)\hat{S}(\zeta)|0\rangle \quad (21)$$

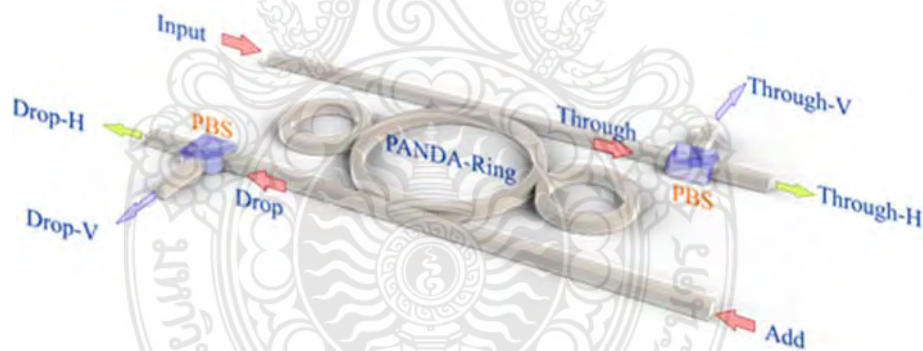
โดยที่

$$\hat{S}(\zeta) = \exp\left(\frac{\zeta^*}{2}\hat{a}^2 - \frac{\zeta}{2}(\hat{a}^\dagger)^2\right) \quad (22)$$

โดยที่  $\zeta, \zeta^*$  เป็นจำนวนเชิงซ้อนและสัญคของมันตามลำดับ

### 2.3 วงแหวนสั้นพ้องแพนด้า

การทำนายการเกิดสถานะบีบอัดของโฟตอนในเส้นใยแก้วนำแสงค้นพบโดย P Drummond และคณะ [1] เป็นที่ทราบกันดีว่าอุปกรณ์วงแหวนสั้นพ้องแพนด้า (PANDA Ring Resonator) สามารถใช้ร่วมกับเส้นใยแก้วนำแสงเป็นอย่างดี [2] เพราะอุปกรณ์ชนิดนี้สามารถใช้เป็นตัวกรองความถี่ของแสงและใช้เป็นวงจรวัดซึ่งได้เป็นอย่างดี โดยเมื่อป้อนสัญญาณแบบลูกคลื่นลำแสงโซลิตอนแบบต่อเนื่องที่ประตูขาเข้า (Input Port) ของวงแหวนสั้นพ้องแพนด้า พบว่าสัญญาณที่ประตูขาออก (Throughput Port) มีช่วงของ FWHM ที่ทั้งแคบและแหลมคมมาก ด้วยการออกแบบอุปกรณ์ทางแสงชนิดนี้ให้มีขนาดเล็กลงในระดับไมครอน ซึ่งสามารถบรรจุลงในวงจรรวมได้ โดยมีส่วนประกอบภายในที่สำคัญ ดังรูปที่ 2.1



รูปที่ 2.1 แสดงวงจรวัด PANDA Ring Resonator

คุณสมบัติที่โดดเด่นประการหนึ่งของวงแหวนสั้นพ้องแพนด้า คือ การเกิดขึ้นของโหมดห้องการสะท้อนแสง (Whispering Gallery Mode: WGM) ขณะที่มีการเกิดขึ้นของคลื่นสนามไฟฟ้าที่เกิดขึ้นจากอันตรกิริยาระหว่างโฟตอนกับโมเลกุลชนิดไม่เชิงเส้น  $\chi^{(3)}$  ของสารตัวกลางวงแหวนสั้นพ้องแพนด้า เล็ดลอดออกมาแล้วมีการแทรกสอดแบบเสริมกันที่บริเวณภายในห้องวงแหวนกลางของทั้งวงบนและวงล่าง ซึ่งช่วยลดแหลมคมของคลื่นสนามไฟฟ้าที่มีความเข้มสูงมากพอที่จะให้ค่าเกรเดียนต์ของศักย์ไฟฟ้ามากพอเช่นกัน [3] โดยไปเหนี่ยวนำให้เกิดอันตรกิริยาแรงดึงดูดของยอดคลื่นลำแสงกับไดโพลไฟฟ้าของอะตอมอย่างแรง [4] จึงมีความเหมาะสมที่จะนำมาประยุกต์ใช้ทำเป็นอุปกรณ์ดักจับเชิงแสงสำหรับ

อนุภาคควอนตัมในระดับอะตอมหรือโมเลกุลของสสารในสถานะแก๊สได้ ซึ่งสามารถนำไปประยุกต์ใช้ทำตัวตรวจวัดในอุปกรณ์ระบบควบคุมหรือความปลอดภัยจากแก๊สชนิดต่างๆได้อย่างแม่นยำอย่างยิ่ง

## 2.4 กระบวนการสโตแคสติก

กลศาสตร์แบบฉบับ(Classical mechanics) ได้วางนัยรูปแบบของตัวแปรพลวัตต่างๆที่ทำนายการวิวัฒนาการของระบบได้อย่างแม่นยำ ซึ่งจะเป็นจริงได้ก็ต่อเมื่อระบบต้องไม่อยู่ในขอบเขตของความอลหม่าน(Chaos) ซึ่งมีความไร้ระเบียบชนิดสุดโต่ง ตรงกันข้ามหลายกรณีที่ระบบกำลังศึกษาอยู่สามารถอธิบายได้เพียงในรูปแบบของการแจกแจงความน่าจะเป็นที่วิวัฒนาการตามเวลาเท่านั้น

เพื่อเป็นตัวอย่างสำหรับกรณีนี้ ลองพิจารณาการเดินแบบมั่วสุ่มในหนึ่งมิติซึ่งเป็นกรณีในแบบของกลศาสตร์แบบฉบับ สมมติให้คนเดินทางเป็นเส้นตรงแบบมั่วสุ่มที่มีทั้งเดินไปข้างหน้าและถอยหลังด้วยความน่าจะเป็นที่เท่ากันในช่วงเวลา  $\tau$  ตำแหน่งที่เดินทางได้ คือ  $x_n = na$  ดังนั้น ความน่าจะเป็นที่การเดินไปข้างหน้าหรือถอยหลังจะครอบครองจุด  $x_n$  ณ เวลา  $t$  คือ  $P(x_n | t)$  และสอดคล้องกับสมการ

$$P(x_n | t + \tau) = \frac{1}{2} P(x_{n-1} | t) + \frac{1}{2} P(x_{n+1} | t) \quad (23)$$

พิจารณากรณีที่มีความต่อเนื่อง กำหนดให้  $\tau$  และ  $a$  มีค่าน้อยๆ แต่  $a^2 / \tau$  มีค่าจำกัด ดังนั้น

$$P(x_n | t + \tau) = P(x_n | t) + \tau \frac{\partial}{\partial t} P(x_n | t) + \dots \quad (24)$$

$$\begin{aligned} P(x_{n\pm 1} | t) &= P(x \pm a | t) \\ &= P(x | t) \pm a \frac{\partial}{\partial x} P(x | t) + \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x | t) + \dots, \end{aligned}$$

และเมื่อแทรกการกระจายเทย์เลอร์นี้ลงในสมการ (23) จะได้

$$\tau \frac{\partial}{\partial t} P(x | t) + \mathcal{O}(\tau^2) = \frac{a^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x | t) + \mathcal{O}(a^4) + \dots \quad (25)$$

ให้  $\tau$  และ  $a \rightarrow 0$  โดยที่  $D \equiv a^2 / \tau$  คือ สัมประสิทธิ์การแพร่ ทำให้ได้สมการพอกเกอร์-แพลงค์ คือ

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x | t) = \frac{D}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} P(x | t) \quad (26)$$

### 2.4.1 มโนทัศน์เกี่ยวกับความน่าจะเป็น

เราเรียก  $\omega$  ว่า เหตุการณ์ ให้  $\tilde{A}$  เป็นเซตของเหตุการณ์ ดังนั้น  $\omega \in \tilde{A}$  หมายความว่า เหตุการณ์  $\omega$  เป็นสมาชิกของเซตของเหตุการณ์  $\tilde{A}$  เราเรียก  $\Omega$  ว่าเซตของทุกเหตุการณ์และ  $\emptyset$  เป็นเซตที่ไม่มีเหตุการณ์ ถ้า  $P(\tilde{A})$  คือ ความน่าจะเป็นของเหตุการณ์  $\tilde{A}$  ซึ่งสอดคล้องกับหลักความจริง ต่อไปนี้

1.  $P(\tilde{A}) \geq 0$  สำหรับ  $\forall \tilde{A}$ .
2.  $P(\Omega) = 1$
3.  $\tilde{A}_i$  ( $i=1,2,3,\dots$ ) คือ เหล่าของเซตจำกัดที่ไม่เหลื่อมซ้อนทับกันเลย โดยที่

$$\tilde{A}_i \cap \tilde{A}_j = \emptyset, i \neq j$$

ดังนั้น

$$P(\cup_i \tilde{A}_i) = \sum_i P(\tilde{A}_i) \quad (27)$$

ต่อไปจะนิยาม ความน่าจะเป็นร่วม(Joint probability) และความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข(Conditional probability) ดังนี้

**ความน่าจะเป็นร่วม**

$$P(\tilde{A} \cap \tilde{B}) = P\{\omega \in \tilde{A} \text{ และ } \omega \in \tilde{B}\} \quad (28)$$

**ความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข**

$$P(\tilde{A} | \tilde{B}) = \frac{P(\tilde{A} \cap \tilde{B})}{P(\tilde{B})} \quad (29)$$

ซึ่งสอดคล้องกับแนวคิดของความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไข  $\omega \in \tilde{A}$  (โดยทราบแล้วว่า  $\omega \in \tilde{B}$ ) ถูกกำหนดโดยความน่าจะเป็นร่วมของ  $\tilde{A}$  และ  $\tilde{B}$  หารด้วยความน่าจะเป็นของ  $\tilde{B}$

สมมติว่าเรามีหมู่ประชากรของเซต  $\tilde{B}_i$  โดยที่

$$\tilde{B}_i \cap \tilde{B}_j = \emptyset,$$

$$\cup_i (\tilde{A} \cap \tilde{B}_i) = \tilde{A} \cap (\cup_i \tilde{B}_i) = \tilde{A} \quad (30)$$

จากหลักของความจริงข้อที่ 3

$$\sum_i P(\tilde{A} \cap \tilde{B}_i) = P(\cup_i (\tilde{A} \cap \tilde{B}_i)) = P(\tilde{A}) \quad (31)$$

ดังนั้น

$$\sum_i P(\tilde{A} \cap \tilde{B}_i) = \sum_i P(\tilde{A} | \tilde{B}_i) P(\tilde{B}_i) = P(\tilde{A}) \quad (32)$$

ซึ่งกล่าวได้ว่า ถ้ารวมความน่าจะเป็นร่วมตลอดเหตุการณ์ร่วม  $\tilde{B}_i$  ความน่าจะเป็นของตัวแปร  $\tilde{B}_i$  จะถูกกำจัดทิ้ง แนวความคิดนี้จะมีประโยชน์มากในการแสดงที่มาของสมการแชปแมน-โคลโมโกรอฟ

#### 2.4.2 กระบวนการสโตแคสติก (Stochastic Process)

สมมติเรามีตัวแปรสุ่มที่ขึ้นกับเวลา คือ  $X(t)$  และวัดค่าของมันออกมา ณ เวลา  $t_1, t_2, t_3, \dots$  ได้เป็น  $x_1, x_2, x_3, \dots$  ตามลำดับ ดังนั้น ความน่าจะเป็นร่วม คือ  $P(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots)$  ซึ่งอธิบายระบบได้อย่างสมบูรณ์ เรียกว่า กระบวนการสโตแคสติก และยังสามารถนิยามความหนาแน่นความน่าจะเป็นแบบมีเงื่อนไขได้โดย

$$P(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots | y_1, \tau_1; y_2, \tau_2; \dots) = \frac{P(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots; y_1, \tau_1; y_2, \tau_2; \dots)}{P(y_1, \tau_1; y_2, \tau_2; \dots)} \quad (33)$$

โดยที่ลำดับของเวลาที่เพิ่มขึ้น คือ

$$t_1 \geq t_2 \geq \dots; \tau_1 \geq \tau_2 \geq \dots$$

ดังตัวอย่างต่อไปนี้



ก). ความเป็นอิสระจากกันอย่างสมบูรณ์ (Complete independence) ในกรณีนี้  $X(t)$  เป็นอิสระจากกันอย่างสิ้นเชิง ทั้งในอดีตและอนาคต ความน่าจะเป็นจึงอยู่ในรูป

$$P(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots) = \prod_i P(x_i, t_i) \quad (34)$$

ข). กระบวนการมาร์คอฟ (Markov process) ความน่าจะเป็นมีลักษณะเป็นแบบมีเงื่อนไข โดยความน่าจะเป็นในอนาคตขึ้นกับความน่าจะเป็นของปัจจุบัน ดังนี้

$$P(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots | y_1, \tau_1; y_2, \tau_2; \dots) = P(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots | y_1, \tau_1) \quad (35)$$

ซึ่งแสดงว่าสำหรับกรณีของมาโคเวียนแล้วความน่าจะเป็นร่วมสามารถเขียนอยู่ในรูป

$$P(x_1, t_1; x_2, t_2; \dots x_n, t_n) = \prod_{i=1}^{n-1} P(x_i, t_i | x_{i-1}, t_{i-1}) P(x_n, t_n) \quad (36)$$

## 2.5 สมการแชปแมน-โคลโมโกรอฟ (Chapman-Kolmogorov Equation)

ดังที่ทราบในหัวข้อที่ผ่านมาแล้วว่าผลรวมตลอดทั่วตัวแปรที่กันรวมกันจะขจัดตัวแปรนั้นทิ้ง หรือเขียนในรูปของสมการได้ว่า

$$\sum_{\tilde{B}} P(\tilde{A} \cap \tilde{B} \cap \tilde{C}) = P(\tilde{A} \cap \tilde{C} \dots) \quad (37)$$

ประยุกต์แนวความคิดนี้กับกระบวนการสโตแคสติก จะได้

$$\begin{aligned} P(x, t | x_0, t_0) &= \int dy P(x, t; y, s | x_0, t_0) \\ &= \int dy P(x, t | y, s; x_0, t_0) P(y, s | x_0, t_0) \end{aligned} \quad (38)$$

และต่อไปประยุกต์เงื่อนไขของมาร์คอฟ เพื่อให้ได้สมการแชปแมน-โคลโมโกรอฟ

$$P(x, t | x_0, t_0) = \int dy P(x, t | y, s) P(y, s | x_0, t_0) \quad (39)$$

ซึ่งในการวิเคราะห์สมการนี้  $t_0$  คือ เวลาเริ่มต้นใดๆซึ่ง  $x(t_0) = x_0$  และ  $s$  คือ เวลาในช่วงของเวลาที่  $t_0 \leq s \leq t$  และ  $x(s) = y$

ซึ่งตอนนี้สังเกตว่า ความหนาแน่นความน่าจะเป็น  $P(x, t | x_0, t_0)$  สอดคล้องกับเงื่อนไข

$$P(x, t | x_0, t_0) \Big|_{t=t_0} = \delta(t - t_0) \quad (40)$$

และมีเงื่อนไขปกติ คือ

$$\int dx P(x, t | x_0, t_0) = 1 \quad (41)$$

ตอนนี้ย้อนกลับไปทีสมการ(39) เขียนให้  $t = s + \Delta t$  และกระจายในรูปของ  $\Delta t$  ผลที่ได้ คือ

$$P(x, s + \Delta t | x_0, t_0) = \int dy \left\{ P(x, s | y, s) + \Delta t \frac{\partial P(x, s | y, s)}{\partial t} \Big|_{t=s} P(y, s | x_0, t_0) \right\} \quad (42)$$

หรือ

$$P(x, s + \Delta t | x_0, t_0) = P(x, s | x_0, t_0) + \delta t \int dy W(x | y) P(y, t | x_0, t_0) \quad (43)$$

โดยที่  $W(x | y)$  คือ อัตราการเลื่อน ซึ่งนิยามโดย

$$W(x | y) = \frac{\partial P(x, s | y, s)}{\partial t} \Big|_{t=s} \quad (44)$$

ให้  $\Delta t \rightarrow 0$  สมการ(44) จึงกลายเป็น

$$\frac{\partial P(x, t | x_0, t_0)}{\partial t} = \int dy W(x | y) P(y, t | x_0, t_0) \quad (45)$$

นี่คือสมการแชปแมน-โคลโมโกรอฟ แบบก้าวหน้า โดยการหาปริพันธ์แก่สมการ (45) เราสามารถพิสูจน์ได้โดยง่ายว่า

$$\int dx W(x | y) = 0 \quad (46)$$

ความน่าจะเป็นของการเลื่อนถูกแยกออกเป็น 2 ส่วน คือ ส่วนที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงบวกกับส่วนที่มีการเปลี่ยนแปลง ดังนี้

$$W(x | y) = W_0(x) \delta(x - y) + W_1(x | y) \quad (47)$$

และโดยการหาปริพันธ์ในตัวแปร  $x$  และใช้สมการ(46) จึงได้

$$W_0(y) = -\int dx W_1(x | y) \quad (48)$$

จึงได้ สมการแชปแมน-โคลโมโกรอฟ แบบก้าวหน้า คือ

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x, t | x_0, t_0) = \int dy W_1(x | y) P(y, t | x_0, t_0) - \int dy W_1(y | x) P(x, t | x_0, t_0) \quad (49)$$

ซึ่งอยู่ในรูปของสมการอัตรานั่นเอง ถ้าตัวแปรสุ่ม  $X(t)$  เป็นแบบค่าก่อก่อนๆ (Discrete values) ดังนั้นสมการแชปแมน-โคลโมโกรอฟ แบบก้าวหน้า คือ

$$\frac{\partial P(x_i, t)}{\partial t} = \sum_j [W_{ij} P(x_j, t) - W_{ji} P(x_i, t)] \quad (50)$$

เรียกว่า สมการควบคุมหลัก (Master equation)

กระบวนการสโตแคสติกหลายแบบมักเกี่ยวข้องกับกระบวนการเกิดและการตาย หรือกระบวนการที่ละชั้น ซึ่งมีความสอดคล้องกับ

$$W_{ij} = r_j \delta_{i,j-1} + g_j \delta_{i,j+1}, \quad (i \neq j) \quad (51)$$

ซึ่งอนุญาตให้มีการกระโดดไปยังจุดข้างเคียงได้ อีกทั้งยังมีค่าในส่วนของแนวทแยง คือ  $W_{nn} = -(r_n + g_n)$  เกิดขึ้นอีกด้วย ดังนั้น สมการควบคุมหลัก จึงกลายเป็น

$$\dot{P}_n = r_{n+1} P_{n+1} + g_{n-1} P_{n-1} - (r_n + g_n) P_n \quad (52)$$

โดยที่  $r_n$  คือ ความน่าจะเป็นต่อหนึ่งหน่วยเวลาของการกระโดดจาก  $n$  ไปยัง  $n-1$  และ  $g_n$  คือ ความน่าจะเป็นต่อหนึ่งหน่วยเวลาในการกระโดดจาก  $n$  ไปยัง  $n+1$  โดยทั่วไปกระบวนการที่ละชั้นมักจะเกิดขึ้นในการเลื่อนสถานะของอะตอมผ่านการดูดกลืนหรือคายโฟตอน หรือในปฏิกิริยานิวเคลียร์ฟิชชัน ตัวอย่างที่น่าสนใจ คือ กระบวนการแบบพัชอง ซึ่งมีนิยามว่า

$$\begin{aligned}
 r_n &= 0 \\
 g_n &= q \\
 P_n(0) &= \delta_{n,0}
 \end{aligned} \tag{53}$$

ดังนั้น สมการควบคุมหลัก (52) จึงกลายเป็น

$$\dot{P}_n = q(P_{n-1} - P_n) \tag{54}$$

นี่คือ การเดินมั่วสุ่มแบบด้านเดียว การแก้สมการนี้ได้โดยใช้ฟังก์ชันลักษณะส่อ

$$G(s, t) = \langle e^{ins} \rangle = \sum_n P_n(t) e^{ins} \tag{55}$$

โดยใช้เงื่อนไขขอบเขต  $G(s, 0) = 1$  เมื่อคูณสมการควบคุมหลักด้วย  $\exp(ins)$  และทำการรวมตลอดค่าของ  $n$  จึงได้

$$\sum_i e^{ins} \dot{P}_n = q \sum_n (P_{n-1} e^{ins} - P_n e^{ins}) \tag{56}$$

หรือ

$$\frac{\partial G(s, t)}{\partial t} = q(e^{is} - 1)G(s, t) \tag{57}$$

ผลเฉลยของสมการนี้หาได้โดยง่าย คือ

$$\begin{aligned}
 G(s, t) &= e^{qt[e^{is} - 1]} \\
 &= e^{-qt} \sum_n \frac{[e^{is}]^n (qt)^n}{n!}
 \end{aligned} \tag{58}$$

เปรียบเทียบกับสมการ(55) ในที่สุดได้

$$P_n(t) = \frac{(qt)^n}{n!} e^{-qt} \tag{59}$$

ซึ่งเป็น ฟังก์ชันการแจกแจงแบบพัวซอง โดยมี  $\langle n \rangle = qt$

## 2.6 สมการฟอกเกอร์-แพลงค์

ในบางกรณีแทนที่จะเป็นการกระโดดแบบก้อนๆ หากเราเลือกอธิบายกระบวนการสุ่มให้เป็นแบบต่อเนื่อง ถ้าเป็นอย่างนี้สมการแชปแมน-โคลโมโกรอฟ จะเขียนอยู่ในรูป

$$\Phi(w | x) \equiv W(x + w | x) \tag{60}$$

ดังนั้น

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial}{\partial t} P(x, t | x_0, t_0) &= \int dw \Phi(w | x - w) P(x - w, t | x_0, t_0) \\
 &= \int e^{\left(-w \frac{\partial}{\partial x}\right)} [\Phi(w | x) P(x, t | x_0, t_0)] dw
 \end{aligned}$$

$$= \int \left[ 1 - w \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} w^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \dots \right] [\Phi(w|x)P(x,t|x_0,t_0)] dw \quad (61)$$

และเนื่องจาก  $\int dw \Phi(w|x) = 0$  จึงได้

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x,t|x_0,t_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial x^n} [Q_n(x)P(x,t|x_0,t_0)] \quad (62)$$

โดยที่

$$Q_n(x) = \int w^n \Phi(w|x) dw \quad (63)$$

ในหลายกรณีสมการข้างต้นถูกตัดทอนพจน์ทิ้งไปโดยเก็บไว้เพียงสองพจน์แรก ทำให้ได้สมการพอกเกอร์-แพลงค์ ดังนี้

ในกรณีหนึ่งมิติ โดยที่  $Q_1 = A$  และ  $Q_2 = B$  เราได้

$$\frac{\partial}{\partial t} P(x,t|x_0,t_0) = -\frac{\partial}{\partial x} [A(x,t)P(x,t|x_0,t_0)] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} [B(x,t)P(x,t|x_0,t_0)] \quad (64)$$

มีการวางนัยไปสู่กรณีของหลายตัวแปร ทำให้ได้สมการพอกเกอร์-แพลงค์ อยู่ในรูป

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{x},t|\mathbf{x}_0,t_0) = -\sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} [A_i(\mathbf{x},t)P(\mathbf{x},t|\mathbf{x}_0,t_0)] + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [B_{ij}(\mathbf{x},t)P(\mathbf{x},t|\mathbf{x}_0,t_0)]$$

โดยที่  $\mathbf{A}$  คือ เวกเตอร์ลอยเลื่อน และ  $\mathbf{B}$  คือ แมทริกซ์การแพร่ สมการนี้ยังเขียนอยู่ในรูป

$$\frac{\partial}{\partial t} P(\mathbf{x},t|\mathbf{x}_0,t_0) + \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{J}_i(\mathbf{x},t) = 0 \quad (65)$$

โดยที่

$$\mathbf{J}_i(\mathbf{x},t) = [A_i(\mathbf{x},t)P(\mathbf{x},t|\mathbf{x}_0,t_0)] - \frac{1}{2} \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} [B_{ij}(\mathbf{x},t)P(\mathbf{x},t|\mathbf{x}_0,t_0)] \quad (66)$$

เรียก  $\mathbf{J}_i(\mathbf{x},t)$  ว่า กระแสความหนาแน่น

### 2.6.1 กระบวนการของไวเนอร์

ในกรณีพิเศษที่  $A = 0, B = 1$  สมการพอกเกอร์-แพลงค์ เขียนได้เป็น

$$\frac{\partial}{\partial t} P(w,t|w_0,t_0) = \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial w^2} [P(w,t|w_0,t_0)] \quad (67)$$

หากเราใช้ฟังก์ชันส่อลักษณะ

$$\phi(s,t) = \int dw e^{isw} P(w,t|w_0,t_0) \quad (68)$$

จึงได้ สมการเชิงอนุพันธ์สำหรับ  $\phi$  คือ

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = -s^2 \phi \quad (69)$$

เนื่องจาก  $P(w, t | w_0, t_0)|_{t=t_0} = \delta(t - t_0)$  ดังนั้น  $\phi(s, t_0) = \exp(isw_0)$  ผลเฉลยของสมการนี้จึงอยู่ในรูป

$$\phi(s, t) = e^{\left[ isw_0 - \frac{1}{2}s^2(t-t_0) \right]} \quad (70)$$

ซึ่งอยู่ในรูปแบบของเกาส์ โดยการแปลงผกผันของมันยังอยู่ในรูปแบบของเกาส์อีก กล่าวคือ

$$P(w, t | w_0, t_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-t_0)}} e^{-\frac{(w-w_0)^2}{2(t-t_0)}} \quad (71)$$

โดยมีโมเมนต์สองตัวแรก คือ

$$\langle W \rangle = w_0 \quad (72)$$

$$\langle (\Delta W)^2 \rangle = t - t_0 \quad (73)$$

การแจกแจงนี้มีการกระจายตัวออกในเวลาและสอดคล้องกับแบบจำลองที่แม่นยำของไอน์สไตน์ในเรื่องการเคลื่อนที่แบบบราวเนียน

ลักษณะส่อที่สำคัญอย่างหนึ่งของกระบวนการของไวเนอร์ คือ ความเป็นอิสระจากกันของส่วนเพิ่มซึ่งเป็นสิ่งที่มีประโยชน์ในการหาปริพันธ์ในกระบวนการสโตแคสติก ซึ่งโดยทั่วไป สำหรับกระบวนการของมาร์คอฟ เราได้

$$\begin{aligned} P(w_n, t_n; w_{n-1}, t_{n-1}; \dots; w_0, t_0) &= \prod_{i=0}^{n-1} P(w_{i+1}, t_{i+1} | w_i, t_i) \\ &= \prod_{i=0}^{n-1} \left\{ [2\pi(t_{i+1} - t_i)]^{-\frac{1}{2}} \exp \left[ -\frac{(w_{i+1} - w_i)^2}{2(t_{i+1} - t_i)} \right] \right\} P(w_0, t_0) \end{aligned} \quad (74)$$

โดยนิยามของส่วนเพิ่มไวเนอร์ คือ

$$\Delta W_i = W(t_i) - W(t_{i-1}) \quad (75)$$

และ

$$\Delta t_i = t_i - t_{i-1} \quad (76)$$

ดังนั้น ความหนาแน่นความน่าจะเป็นร่วมของส่วนเพิ่มนี้ คือ

$$P(\Delta w_n; \Delta w_{n-1}; \dots; \Delta w_1; w_0) = \prod_{i=0}^{n-1} \left\{ [2\pi\Delta t_i]^{-\frac{1}{2}} \exp \left[ -\frac{(\Delta w_i)^2}{2(\Delta t_i)} \right] \right\} P(w_0, t_0) \quad (77)$$

ดังนั้น พวกมันจึงเป็นอิสระต่อกันในทางสถิติ

เรานิยามค่าเฉลี่ยและฟังก์ชันสหสัมพันธ์อัตโนมัติ (Autocorrelation function) โดย

$$\langle W(t) | W_0, t_0 \rangle = \int dw P(w, t | w_0, t_0) w \quad (78)$$

และ

$$\begin{aligned} \langle W(t)(W(t_0))^T | W_0, t_0 \rangle &= \iint dw dw_0 P(w, t; w_0, t_0) w w_0^T \\ &= \int dw_0 \langle W(t) | W_0, t_0 w_0^T \rangle P(w_0, t_0) \end{aligned} \quad (79)$$

ดังนั้น สำหรับกระบวนการของไวเนอร์

$$\langle W(t)W(s) | W_0, t_0 \rangle = \langle [W(t) - W(s)]W(s) | W_0, t_0 \rangle + \langle W^2(s) \rangle \quad (80)$$

และเนื่องจากความเป็นอิสระต่อกันของส่วนเพิ่ม พจน์แรกทางด้านขวามือจึงมีค่าเป็นศูนย์ จึงได้

$$\langle W(t)W(s) | W_0, t_0 \rangle = w_0^2 + \min(t - t_0, s - t_0) \quad (81)$$

### 2.6.2 คุณสมบัติทั่วไปของสมการฟอกเกอร์-แพลงค์

ดังที่กล่าวมาแล้ว พจน์แรกทางขวามือของสมการฟอกเกอร์-แพลงค์ (65) คือ พจน์ลอยเลื่อนซึ่งจะเป็นตัวควบคุมการเคลื่อนที่ที่กำหนดได้ ส่วนพจน์ที่สอง คือ พจน์การแพร่ซึ่งจะเป็นสาเหตุให้ความน่าจะเป็นเกิดการกระจายตัวออกไป ความแตกต่างในบทบาทของสองพจน์นี้สามารถมองเห็นได้ง่ายเมื่อคำนวณหา  $\langle x_i \rangle$  และ  $\langle x_i x_j \rangle$  ซึ่งแสดงให้เห็นโดยง่ายว่า

$$\frac{d\langle x_i \rangle}{dt} = \langle \mathbf{A}_i \rangle \quad (82)$$

$$\frac{d\langle x_i x_j \rangle}{dt} = \langle x_i \mathbf{A}_j \rangle + \langle x_j \mathbf{A}_i \rangle + \frac{1}{2} \langle \mathbf{B}_{ij} + \mathbf{B}_{ji} \rangle \quad (83)$$

### 2.7 สมการเชิงอนุพันธ์โตนอสติก

วิธีหนึ่งที่จะจัดการกับปัญหาการเคลื่อนที่แบบบราวเนียนหรือปัญหาที่เกี่ยวข้องกับแรงที่กระทำแบบสุ่มก็คือโดยอธิบายพฤติกรรมผ่านทางสมการแลงเงวหรืออีกช่องทางหนึ่งคือผ่านทางสมการเชิงอนุพันธ์โตนอสติก

$$\dot{V} = -\gamma V + L(t) \quad (84)$$

โดยที่ในกรณีของอนุภาคบราวเนียน ทางด้านขวาของสมการคือแรงของของไหลที่กระทำต่ออนุภาค ซึ่งเกิดจากสององค์ประกอบ คือ

ก). แรงแดมป์  $-\gamma V$  และ

ข). แรงที่แปรค่าอย่างรวดเร็ว  $L(t)$  ซึ่งไม่ขึ้นกับความเร็วของอนุภาค โดยแรงชนิดนี้เกี่ยวข้องกับการชนกันระหว่างโมเลกุลของน้ำกับอนุภาคบราวเนียนโดยที่ค่าเฉลี่ยของแรงชนิดนี้เป็นศูนย์ ดังนั้น

$$\langle L(t) \rangle = 0 \quad (85)$$

$$\langle L(t)L(t') \rangle = D\delta(t-t') \quad (86)$$

$\langle L(t)L(t') \rangle$  คือ ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ของสองเวลา

เรานิยามสเปกตรัมโดยเป็นการแปลงฟูริเยร์ของฟังก์ชันสหสัมพันธ์ของสองเวลา ดังนี้

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} d\tau e^{i\omega\tau} \langle L(t+\tau)L(t) \rangle \quad (87)$$

เห็นได้ทันทีว่าเนื่องจากการแปลงของฟังก์ชันเดลต้าจะให้ผลลัพธ์เป็นค่าคงที่อันเนื่องมาจาก  $L(t)$  มีสเปกตรัมชนิดแบน ซึ่งมันสอดคล้องกับสัญญาณรบกวนขาว (White noise)

สมมติว่าความเร็วต้นของอนุภาคบราวเนียนถูกกำหนดให้เป็น  $V(0) = V_0$  ดังนั้น ที่เวลา  $t \geq 0$  ในแต่ละวิธีตัวอย่าง จะได้

$$V(t) = V_0 e^{-\gamma t} + e^{-\gamma t} \int_0^t e^{\gamma t'} L(t') dt' \quad (88)$$

เมื่อใช้คุณสมบัติของ  $L$  เราสามารถคำนวณหา  $\langle V \rangle$  และ  $\langle V^2 \rangle$  ได้

$$\langle V(t) | V_0, t_0 \rangle = V_0 e^{-\gamma t} \quad (89)$$

และ

$$\begin{aligned} \langle V^2(t) | V_0, t_0 \rangle &= V_0^2 e^{-2\gamma t} + e^{-2\gamma t} \int_0^t dt' \int_0^{t'} dt'' e^{\gamma(t'+t'')} \langle L(t')L(t'') \rangle \\ &= V_0^2 e^{-2\gamma t} + \frac{D}{2\gamma} [1 - e^{-2\gamma t}] \end{aligned} \quad (90)$$

เมื่อเวลา  $t \rightarrow \infty$

$$\langle V^2(t) | V_0, t_0 \rangle = \frac{D}{2\gamma} \quad (91)$$

ตรงกันข้ามสำหรับช่วงเวลาสั้นๆ จะได้

$$\langle (\Delta V)^2(t + \Delta t) | V_0, t_0 \rangle = D\Delta t + \mathcal{O}(\Delta t)^2 \quad (92)$$

ในกรณีนี้จะได้สัมประสิทธิ์ของพจน์ลอยเลื่อนและพจน์การแพร่ คือ

$$A = \frac{\langle \Delta V \rangle}{\Delta t} = \frac{\langle V - V_0 \rangle}{\Delta t} \Big|_{t=t_0+\Delta t} = -\gamma V \quad (93)$$

$$B = \frac{\langle (\Delta V)^2 \rangle}{\Delta t} = D \quad (94)$$

ดังนั้น สมการฟอกเกอร์-แพลงค์ ที่สอดคล้องคือ

$$\frac{\partial}{\partial t} P(V, t) = \gamma \frac{\partial}{\partial V} (VP) + \frac{D}{2} \frac{\partial^2 P}{\partial V^2} \quad (95)$$

สมการนี้อธิบายกระบวนการออร์นสไตน์-ยูเลนเบค ซึ่งสอดคล้องกับพจน์ลอยเลื่อนเชิงเส้นและพจน์การแพร่ซึ่งเป็นค่าคงที่

ตอนนี้จะคำนวณหาสเปกตรัมกำลังของ  $V$  โดยในเบื้องต้นเราต้องได้ฟังก์ชันสหสัมพันธ์ของสองเวลา

$$\langle V(t)V(t') \rangle = V_0^2 e^{-\gamma(t+t')} + e^{-\gamma(t+t')} \int_0^t dt'' \int_0^{t''} dt''' e^{\gamma(t''+t''')} \langle L(t'')L(t''') \rangle$$

$$\begin{aligned}
&= V_0^2 e^{-\gamma(t+t')} + e^{-\gamma(t+t')} D \int_0^{t'} dt'' e^{2\gamma t''} \\
&= V_0^2 e^{-\gamma(t+t')} + e^{-\gamma(t+t')} \frac{D}{2\gamma} [e^{2\gamma t'} - 1]
\end{aligned} \tag{96}$$

ในกรณีสถานะคงที่ ซึ่ง  $t, t' \rightarrow \infty$  แต่ด้วย  $(t - t') = \tau$  จึงได้

$$\langle V(t + \tau)V(t) \rangle = \frac{D}{2\gamma} e^{-\gamma|\tau|} \tag{97}$$

ในที่สุดหลังจากทำการแปลงแบบฟูริเยร์เราได้กำลังสเปกตรัมของ  $V$  คือ

$$\begin{aligned}
S_V(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int e^{i\omega\tau} \langle V(t + \tau)V(t) \rangle d\tau \\
&= \frac{1}{2\pi} \frac{D}{\omega^2 + \gamma^2}
\end{aligned} \tag{98}$$

## 2.8 แคลคูลัสของอิโตะและสตราโตโนวิช

สมการแลงเงนวงรูปทั่วไปเขียนอยู่ในรูป

$$\frac{dx}{dt} = a(x, t) + b(x, t)L(t) \tag{99}$$

โดยที่ตัวคูณ  $D$  ถูกดูดซับไว้ใน  $b$  เรียบร้อยแล้ว ดังนั้น

$$\langle L(t)L(t') \rangle = \delta(t - t') \tag{100}$$

$$\langle L \rangle = 0 \tag{101}$$

ตอนนี้เรานิยาม

$$W(t) = \int_0^t L(t') dt' \tag{102}$$

โดยสมมติว่ามีความต่อเนื่อง ดังนั้น

$$\langle W(t + \Delta t) - W_0(t) | W_0(t) \rangle = \langle \int_t^{t+\Delta t} ds L(s) \rangle = 0 \tag{103}$$

$$\begin{aligned}
\langle [W(t + \Delta t) - W_0(t)]^2 | W_0(t) \rangle &= \langle \int_t^{t+\Delta t} ds_1 \int_t^{t+\Delta t} ds_2 L(s_1)L(s_2) \rangle \\
&= \int_t^{t+\Delta t} ds_1 \int_t^{t+\Delta t} ds_2 \delta(s_1 - s_2) \\
&= \Delta t
\end{aligned} \tag{104}$$

ดังนั้น เราสามารถเขียนสมการฟอกเกอร์-แพลนค์ สำหรับ  $W$  ด้วย  $A = 0$  และ  $B = 1$  ซึ่งสอดคล้องกับกระบวนการของไวเนอร์ และ  $Ldt = dW$  คือ ส่วนเพิ่มขึ้นไวเนอร์

สมการอนุพันธ์สโตแคสติก (99) ยังไม่อยู่ในรูปแบบที่นิยามเต็มขั้นซึ่งขึ้นอยู่กับอินทิเกรตให้ตัวมัน โดยทั่วไปจะไม่มีปัญหาและเป็นไปตามหลักของแคลคูลัสธรรมดาที่นำมาประยุกต์ใช้ อย่างไรก็ตามเรา



ต้องระมัดระวังในการใช้เนื่องจาก เรากำลังเล่นอยู่กับฟังก์ชันในเวลาที่กำลังแปรค่าอย่างรวดเร็ว  $L(t)$  ดังนั้น เราจึงนิยามปริพันธ์เป็นแบบลิมิตกำลังสองเฉลี่ยของผลรวม (ms) แบบโรมานันส์-ไต้ลส์-เจส คือ

$$\int_{t_0}^t f(t')dW(t') = \text{ms} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n f(\tau_i)[W(t_i) - W(t_{i-1})] \quad (105)$$

โดยที่  $t_{i-1} \leq \tau_i \leq t_i$  และ เราแบ่งช่วงเวลาจาก  $t_0$  ถึง  $t$  ออกเป็น  $n$  ช่วงเวลาระหว่างกลาง  $t_1, t_2, \dots, t_n$  เราสามารถพิสูจน์ได้ว่ามันขึ้นอยู่กับ  $f(\tau_i)$  ที่เราเลือก มีแนวทางการเลือกที่นิยมกัน 2 แบบ คือ

ก). แคลคูลัสแบบวิธีของอิโตะ ด้วย  $\tau_i = t_{i-1}$

ข). แคลคูลัสแบบวิธีของสตราโตโนวิช ด้วย  $f(\tau_i) = \frac{1}{2}[f(t_i) + f(t_{i-1})]$

จากข้อสมมติฐานข้างต้น เราจะได้เรียนรู้การคำนวณหาสิ่งต่างๆด้วยการใช้ทั้งแคลคูลัสแบบวิธีของอิโตะ และแบบวิธีของสตราโตโนวิช

สำหรับแคลคูลัสแบบวิธีของสตราโตโนวิช เรามี

$$\begin{aligned} \text{(S)} \int_{t_0}^t W(t)dW(t') &= \text{ms} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \left[ \frac{W(t_i) + W(t_{i-1})}{2} \right] \\ &= \frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [W^2(t_i) - W^2(t_{i-1})] \\ &= \frac{1}{2} [W^2(t) - W^2(t_0)] \end{aligned} \quad (106)$$

ซึ่งเป็นไปตามหลักการของแคลคูลัสธรรมดาที่ทราบกันดี

ในทางตรงกันข้ามสำหรับแคลคูลัสแบบวิธีของอิโตะ

$$\begin{aligned} \text{(I)} \int_0^t W(t)dW(t') &= \text{ms} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [W(t_{i-1})][W(t_i) - W(t_{i-1})] \\ &= \text{ms} \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n [W(t_{i-1})\Delta W(t_i)] \\ &= \text{ms} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \{ [W(t_{i-1}) + \Delta W(t_i)]^2 - W^2(t_{i-1}) - \Delta W^2(t_i) \} \\ &= \frac{1}{2} [W^2(t) - W^2(t_0)] - \text{ms} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Delta W^2(t_i) \end{aligned} \quad (107)$$

และเนื่องจาก

$$\text{ms} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \Delta W^2(t_i) = t - t_0 \quad (108)$$

ในที่สุดเราได้

$$\text{(I)} \int_{t_0}^t W(t')dW(t') = \frac{1}{2} [W^2(t) - W^2(t_0) - (t - t_0)] \quad (109)$$

ท้ายที่สุดสำหรับการหาปริพันธ์แบบวิธีของอิโตะเราสามารถพิสูจน์ได้ว่า

$$dW^2(t) = dt \quad (110)$$

$$dW^{2+N}(t) = 0 \quad \text{สำหรับ } N = 1, 2, 3 \quad (111)$$

จากสมบัติต่างๆข้างต้นเราพบว่า  $dW \sim \sqrt{dt}$  และเราสามารถมีได้แค่เพียงพจน์  $dW^2$  ซึ่งแตกต่างจากแคลคูลัสธรรมดาทั่วไป

## 2.9 สูตรของอิโตะ

พิจารณาฟังก์ชัน  $f[x(t)]$  เราจะแสดงที่มาของสูตรจากแคลคูลัสแบบวิธีของอิโตะ

$$\begin{aligned} df[x(t)] &= f[x(t) + dx] - f[x(t)] \\ &= f'[x(t)]dx + \frac{1}{2}f''[x(t)]dx^2 \\ &= f'[x(t)]\{a(x,t) + b(x,t)dW\} + \frac{1}{2}f''[x(t)]\{b(x,t)dW\}^2 + \dots \end{aligned}$$

ประยุกต์ใช้สมการ(110) และ (111) จึงได้

$$df[x(t)] = \left\{ a(x,t)f'[x(t)] + \frac{1}{2}b(x,t)f''[x(t)] \right\} dt + b(x,t)f'[x(t)]dW \quad (112)$$

สูตรดังกล่าวสามารถขยายไปสู่กรณีที่มีมิติสูงขึ้นได้โดยง่าย

ตอนนี้เราทำค่าเฉลี่ยให้แก่สูตรของอิโตะ

$$\begin{aligned} \frac{d\langle f(x) \rangle}{dt} &= \int dx \partial_t P(x,t) f(x) \\ &= \int dx \left[ a \partial_x f + \frac{b}{2} \partial_x^2 f \right] P(x,t) \end{aligned}$$

และเมื่อทำการอินทิเกรตแยกส่วนและละทิ้งพจน์เชิงพื้นผิว เราได้

$$\int dx f(x) \partial_t P(x,t) = \int dx f(x) \left[ \partial_x a P(x,t) - \frac{1}{2} \partial_x^2 b P(x,t) \right]$$

จึงได้สมการพอกเกอร์-แพลงค์ คือ

$$\partial_t P(x,t | x_0, t_0) = -\partial_x [a(x,t)P(x,t | x_0, t_0)] + \frac{1}{2} \partial_x^2 [b(x,t)P(x,t | x_0, t_0)] \quad (113)$$

ทำนองเดียวกัน สำหรับกรณีหลายตัวแปร หากเรามีสมการเชิงอนุพันธ์โตนอสติก เป็น

$$(I) d\mathbf{x} = \mathbf{a}(x,t) + \mathbf{b}(x,t)d\mathbf{W} \quad (114)$$

โดยที่  $d\mathbf{W}$  เป็นกระบวนการไวเนอร์ที่มี  $n$  องค์ประกอบ ดังนั้นสมการพอกเกอร์-แพลงค์ แบบอิโตะ คือ

$$\begin{aligned} \partial_t P(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) &= -\sum_i \partial_i [\mathbf{a}_i(\mathbf{x}, t) P(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0)] \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{i,j} \partial_i \partial_j [\mathbf{b} \mathbf{b}^T(\mathbf{x}, t)]_{ij} P(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) \end{aligned} \quad (115)$$

ดังนั้น จากสัญลักษณ์ข้างต้น จึงได้  $\mathbf{B} = \mathbf{b}\mathbf{b}^T$

ทำนองเดียวกัน สำหรับกรณีแคลคูลัสแบบวิธีสตราโตโนวิช จะได้

$$(S) d\mathbf{x} = \mathbf{a}^S(x, t) + \mathbf{b}^S(x, t)d\mathbf{W} \quad (116)$$

เราจึงได้สมการฟอกเกอร์-แพลงค์แบบสตราโตโนวิช คือ

$$\begin{aligned} \partial_t P(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) = & -\sum_i \partial_i [\mathbf{a}_i^S(\mathbf{x}, t) P(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0)] \\ & + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k} \partial_i [\mathbf{b}_{ik}^S \partial_j (\mathbf{b}_{jk}^S)^T(\mathbf{x}, t)] P(\mathbf{x}, t | \mathbf{x}_0, t_0) \end{aligned} \quad (117)$$

เมื่อเปรียบเทียบระหว่างสมการฟอกเกอร์-แพลงค์ทั้งสองแบบ จะพบว่า

$$\mathbf{a}_i^S = \mathbf{a}_i - \frac{1}{2} \sum_{j,k} \mathbf{b}_{kj} \partial_k \mathbf{b}_{ij}^T \quad (118)$$

$$\mathbf{b}_{ik}^S = \mathbf{b}_{ik} \quad (119)$$

ความสัมพันธ์ในตอนนี้บอกให้ทราบว่าถ้ากำหนดสมการฟอกเกอร์-แพลงค์ มันจะสอดคล้องกับสมการแลงเกวจที่ถูกอินทิเกรตตามแนวทางแคลคูลัสแบบวิธีของอิโตะ ด้วยสัมประสิทธิ์ลอยเลื่อน  $\mathbf{a}$  และการแพร่  $\mathbf{b}$  ตามลำดับ และเช่นกันสมการแลงเกวจถูกอินทิเกรตตามแนวทางแคลคูลัสแบบวิธีของสตราโตโนวิชนำไปสู่  $\mathbf{a}^S$  และ  $\mathbf{b}^S$  ซึ่งสอดคล้องกับสัมประสิทธิ์ลอยเลื่อนและการแพร่ตามลำดับเช่นกัน



## บทที่ 3

### วิธีการดำเนินการวิจัย

การวิจัยมีลำดับขั้นตอนต่างๆ ดังต่อไปนี้

1. ศึกษาทฤษฎีปรากฏการณ์ความไม่เป็นเชิงเส้นของเส้นใยแก้วนำแสง
2. ศึกษาทฤษฎีควอนตัมของแสง
3. ออกแบบวงแหวนการสั่นพ้องแผนด้า
4. วิเคราะห์ทดสอบการทำงานของระบบวงแหวนการสั่นพ้องแผนด้า
5. สร้างแบบจำลองอธิบายผลที่ได้จากข้อ 4.
6. ปรับปรุงแบบจำลองให้สอดคล้องกับข้อมูลที่ได้ยิ่งขึ้น
7. สรุปผล เขียนรายงานการวิจัย และจัดทำรูปเล่ม
8. เผยแพร่ข้อมูลงานวิจัยผ่านการอบรมสัมมนา/เสนอผลงานการประชุมหรือการตีพิมพ์ลงในวารสารระดับชาติหรือนานาชาติ

#### 3.1 การสร้างสถานะสุญญากาศบีบอัด

##### 3.1.1 สถานะบีบอัด

ในบทนี้จะได้ให้หมโนทัศน์ของสถานะบีบอัดสุญญากาศ โดยที่สถานะบีบอัดโมดเดี่ยวสามารถลดสัญญาณการรบกวนในควอเดรเจอร์หนึ่งของสนามไฟฟ้าลงได้ในปริภูมิเฟส ทฤษฎีโมดเดี่ยวถูกขยายไปสู่ทฤษฎีสองโมดซึ่งมีหมโนทัศน์ของควอเดรเจอร์สองโมดที่จะได้เห็นต่อไป สถานะบีบอัดแบบสองโมดนิยามว่าเป็นสถานะที่สัญญาณการรบกวนในควอเดรเจอร์แบบสองโมดมีค่าน้อยกว่าสถานะสุญญากาศ

ใช้วิธีการแบบสมดุคแบบโฮโมตายในการสังเกตสถานะสุญญากาศบีบอัด และไม่ใช่สัญญาณรบกวนในโมดเดี่ยวแต่เป็นสัญญาณรบกวนแบบสองโมดที่ถูกวัดด้วยวิธีโฮโมตาย จึงได้กล่าวถึงทฤษฎีของวิธีการโฮโมตายในบทนี้ด้วย

##### 3.1.2 ทฤษฎีสสนามไฟฟ้าแบบโมดเดี่ยว

สนามไฟฟ้าที่ถูกควอนไทซ์แล้วแบบโมดเดี่ยวในรูปแบบตัวแทนไฮเซนเบิร์ก เขียนแทนด้วยสมการ

$$\hat{E}(z, t) = \frac{1}{2} \left[ \sqrt{\frac{2\hbar\omega}{\epsilon_0 V}} \hat{a} \exp(-i(\omega t - kz)) + \text{h.c.} \right] \quad (120)$$

โดยที่  $\omega, k$  และ  $V$  คือ ความถี่เชิงมุม เลขคลื่น และ ปริมาตรโมดของการควอนไทซ์ ตามลำดับ  $\hat{a}$  คือ ตัวดำเนินการทำลายของสนามและสอดคล้องกับความสัมพันธ์การสลับที่

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1 \quad (121)$$

สมการ สามารถแปลงให้เป็น

$$\hat{E}(z,t) = \sqrt{\frac{2\hbar\omega}{\epsilon_0 V}} [\hat{x}_\phi \cos(\omega t - kz - \phi) + \hat{x}_{\phi+\pi/2} \sin(\omega t - kz - \phi)] \quad (122)$$

ด้วยตัวดำเนินการควอเดรเจอร์

$$\hat{x}_\phi = \frac{\hat{a}e^{-i\phi} + \hat{a}^\dagger e^{i\phi}}{2} \quad (123)$$

$$\hat{x}_{\phi+\pi/2} = \frac{\hat{a}e^{-i\phi} - \hat{a}^\dagger e^{i\phi}}{2i} \quad (124)$$

ความสัมพันธ์การสลับที่ระหว่างควอเดรเจอร์ทั้งสองนี้ คือ

$$[\hat{x}_\phi, \hat{x}_{\phi+\pi/2}] = \frac{i}{2} \quad (125)$$

ดังนั้น ความสัมพันธ์ของความไม่แน่นอน คือ

$$\langle (\Delta\hat{x}_\phi)^2 \rangle \langle (\Delta\hat{x}_{\phi+\pi/2})^2 \rangle \geq \frac{1}{16} \quad (126)$$

โดยที่สัญลักษณ์การรบกวนหรือความแปรปรวนของควอเดรเจอร์ คือ

$$\langle (\Delta\hat{x}_\phi)^2 \rangle = \langle \hat{x}_\phi^2 \rangle - \langle \hat{x}_\phi \rangle^2 \quad (127)$$

### 3.1.3 สถานะสุญญากาศแบบโมดเดียว

นิยามของสถานะสุญญากาศ  $|0\rangle$  คือ

$$\hat{a}|0\rangle = 0 \quad (128)$$

ค่าคาดหวังของสนามไฟฟ้าและกำลังสองของมัน คือ

$$\langle 0|\hat{E}|0\rangle = 0 \quad (129)$$

$$\langle 0|\hat{E}^2|0\rangle = \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} \quad (130)$$

ตามลำดับ ดังนั้นสัญลักษณ์การรบกวนของสนามไฟฟ้าถูกกำหนดโดย

$$\langle 0|(\Delta\hat{E})^2|0\rangle = \frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0 V} \quad (131)$$

ค่าคาดหวังของควอเดรเจอร์ กำลังสองของมัน และสัญลักษณ์การรบกวนควอเดรเจอร์ คือ

$$\langle 0|\hat{x}_\phi|0\rangle = 0 \quad (132)$$

$$\langle 0|\hat{x}_\phi^2|0\rangle = \frac{1}{4} \quad (133)$$

$$\langle 0|(\Delta\hat{x}_\phi)^2|0\rangle = \frac{1}{4} \quad (134)$$

ตามลำดับ เนื่องจากสถานะสุญญากาศสอดคล้องกับสมการ ดังนั้น สถานะสุญญากาศจึงเป็นสถานะที่มีความไม่แน่นอนที่มีค่าต่ำสุดเมื่อเทียบกับอีกควอเดรเจอร์หนึ่ง

### 3.1.4 สถานะบีบอัดแบบโมดเดียว

ทฤษฎีควอนตัมเปิดโอกาสให้กระจายควอเทรเจอร์สัญญาณรบกวนได้ พิจารณาสถานะที่  $\langle (\Delta \hat{x}_\phi)^2 \rangle$  มีค่าน้อยกว่า  $1/4$  ขณะที่  $\langle (\Delta \hat{x}_{\phi+\pi/2})^2 \rangle$  มีค่ามากกว่า  $1/4$  สถานะดังกล่าว เรียกว่า สถานะบีบอัด โดยสถานะบีบอัดโมดเดียว มีนิยามว่า

$$|\psi\rangle_s = \hat{S}_s(\eta)|0\rangle \quad (135)$$

โดยที่ตัวดำเนินการบีบอัดยูนิตารี

$$\hat{S}_s(\eta) = \exp\left[\frac{1}{2}[\eta^* \hat{a}^2 - \eta(\hat{a}^\dagger)^2]\right], \quad \eta = re^{i\theta} \quad (136)$$

เรียก  $r$  ว่า พารามิเตอร์บีบอัด ตัวดำเนินการบีบอัดมีคุณสมบัติการแปลงที่มีประโยชน์ คือ

$$\hat{S}_s^\dagger(\eta)\hat{a}\hat{S}_s(\eta) = \hat{a} \cosh r - \hat{a}^\dagger e^{i\theta} \sinh r, \quad (137)$$

$$\hat{S}_s^\dagger(\eta)\hat{a}^\dagger\hat{S}_s(\eta) = \hat{a}^\dagger \cosh r - \hat{a}e^{-i\theta} \sinh r \quad (138)$$

โดยค่าคาดหวังของควอเทรเจอร์  $x_\phi$  สำหรับสถานะบีบอัด คือ

$${}_s\langle \psi | \hat{x}_\phi | \psi \rangle_s = 0 \quad (139)$$

$${}_s\langle \psi | \hat{x}_\phi^2 | \psi \rangle_s = \frac{1}{4}(\cosh 2r - \cos(\theta - 2\phi) \sinh 2r) \quad (140)$$

เมื่อ  $\theta = 2\phi$  สัญญาณรบกวนจึงเขียนได้ว่า

$${}_s\langle \psi | \hat{x}_\phi^2 | \psi \rangle_s = \frac{1}{4}e^{-2r} \quad (141)$$

$${}_s\langle \psi | \hat{x}_{\phi+\pi/2}^2 | \psi \rangle_s = \frac{1}{4}e^{2r} \quad (142)$$

สถานะนี้สอดคล้องกับสมการ นั่นคือ สถานะบีบอัดเป็นสถานะหนึ่งที่มีค่าของความไม่แน่นอนต่ำที่สุด และมีสัญญาณรบกวนควอเทรเจอร์  $\langle (\Delta \hat{x}_\phi)^2 \rangle$  มีค่าน้อยกว่าของสถานะสุญญากาศเมื่อ  $r > 0$

### 3.1.5 ทฤษฎีสนามไฟฟ้าแบบสองโมด

สนามไฟฟ้าแบบสองโมดประกอบด้วย  $\omega \pm \delta$  สามารถเขียนได้ว่า

$$\hat{E}(z,t) = \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2\hbar\omega}{\epsilon_0 V}} [\hat{a}_{\omega+\delta} \exp(-i((\omega+\delta)t - kz)) + h.c.] \quad (143)$$

$$+ \frac{1}{2\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2\hbar\omega}{\epsilon_0 V}} [\hat{a}_{\omega-\delta} \exp(-i((\omega-\delta)t - kz)) + h.c.] \quad (144)$$

โดยความสัมพันธ์การสลับที่ของตัวดำเนินการสนาม คือ

$$[\hat{a}_{\omega\pm\delta}, \hat{a}_{\omega\pm\delta}^\dagger] = 1, \quad (145)$$

$$[\hat{a}_{\omega\pm\delta}, \hat{a}_{\omega\mp\delta}^\dagger] = 0 \quad (146)$$

สมการ สามารถเขียนได้ในรูป

$$\hat{E}(z, t) = \sqrt{\frac{2\hbar\omega}{\epsilon_0 V}} \left[ \hat{X}(\delta, \phi) \cos(\omega t - kz - \phi) + \hat{X}(\delta, \phi + \pi/2) \sin(\omega t - kz - \phi) \right] \quad (147)$$

โดยที่แอมพลิจูดเฟสควอเดรเจอร์แบบสองโมด คือ

$$\hat{X}(\delta, \phi) = \frac{\hat{a}_{\omega+\delta} e^{-i(\delta t + \phi)} + \hat{a}_{\omega+\delta}^\dagger e^{i(\delta t + \phi)} + \hat{a}_{\omega-\delta} e^{-i(-\delta t + \phi)} + \hat{a}_{\omega-\delta}^\dagger e^{i(-\delta t + \phi)}}{2\sqrt{2}} \quad (148)$$

$$\hat{X}(\delta, \phi + \pi/2) = \frac{\hat{a}_{\omega+\delta} e^{-i(\delta t + \phi)} - \hat{a}_{\omega+\delta}^\dagger e^{i(\delta t + \phi)} + \hat{a}_{\omega-\delta} e^{-i(-\delta t + \phi)} - \hat{a}_{\omega-\delta}^\dagger e^{i(-\delta t + \phi)}}{2\sqrt{2}i} \quad (149)$$

และความสัมพันธ์การสลับที่ระหว่างควอเดรเจอร์แบบสองโมด คือ

$$\left[ \hat{X}(\delta, \phi), \hat{X}(\delta, \phi + \pi/2) \right] = \frac{i}{2}, \quad (150)$$

และอสมการหลักความไม่แน่นอน คือ

$$\left\langle (\Delta \hat{X}(\delta, \phi))^2 \right\rangle \left\langle (\Delta \hat{X}(\delta, \phi + \pi/2))^2 \right\rangle \geq \frac{1}{16} \quad (151)$$

### 3.1.6 สถานะบีบอัดแบบสองโมด

เราเคยพิจารณาสถานะสูญญากาศบีบอัดแบบโมดเดี่ยวแล้ว ตอนนี้จะขยายแนวความคิดไปสู่สถานะสูญญากาศบีบอัดแบบสองโมด โดยนิยาม

$$|\psi\rangle_T = \hat{S}_T(\eta)|0\rangle \quad (152)$$

โดยที่ ตัวดำเนินการการบีบอัดแบบสองโมด  $\hat{S}_T$  ถูกกำหนดโดย

$$\hat{S}_T(\eta) = \exp(\eta^* \hat{a}_{\omega+\delta} \hat{a}_{\omega-\delta} - \eta \hat{a}_{\omega+\delta}^\dagger \hat{a}_{\omega-\delta}^\dagger), \quad \eta = re^{i\theta} \quad (153)$$

ด้วยความสัมพันธ์การสลับที่

$$\left[ \eta \hat{a}_{\omega+\delta}^\dagger \hat{a}_{\omega-\delta}^\dagger - \eta^* \hat{a}_{\omega+\delta} \hat{a}_{\omega-\delta}, \hat{a}_{\omega\pm\delta} \right] = -\eta \hat{a}_{\omega\mp\delta}^\dagger, \quad (154)$$

ซึ่งทำให้ได้สูตรที่มีประโยชน์มาก คือ

$$\hat{S}_T^\dagger(\eta) \hat{a}_{\omega\pm\delta} \hat{S}_T(\eta) = \hat{a}_{\omega\pm\delta} \cosh r - \hat{a}_{\omega\mp\delta}^\dagger e^{i\theta} \sinh r \quad (155)$$

ค่าคาดหวังของสัญญาณรบกวนควอเดรเจอร์แบบสองโมดและกำลังสองของมันตามลำดับ คือ

$${}_T \langle \psi | \hat{X}(\delta, \phi) | \psi \rangle_T = 0, \quad (156)$$

$${}_T \langle \psi | \hat{X}^2(\delta, \phi) | \psi \rangle_T = \frac{1}{4} (\cosh 2r - \cos(\theta - 2\phi) \sinh 2r) \quad (157)$$

สัญญาณรบกวนควอเดรเจอร์แบบสองโมดถูกกำหนดโดย

$${}_T \langle \psi | (\Delta \hat{X}(\delta, \phi))^2 | \psi \rangle_T = \frac{1}{4} (\cosh 2r - \cos(\theta - 2\phi) \sinh 2r) \quad (158)$$

เมื่อ  $\theta = 2\phi$  สัญญาณรบกวนควอดเรเจอร์ คือ

$${}_T \langle \psi | (\Delta \hat{X}(\delta, \phi))^2 | \psi \rangle_T = \frac{1}{4} e^{-2r}, \quad (159)$$

$${}_T \langle \psi | (\Delta \hat{X}(\delta, \phi + \pi/2))^2 | \psi \rangle_T = \frac{1}{4} e^{2r}, \quad (160)$$

สัญญาณรบกวนควอดเรเจอร์ของสถานะสุญญากาศแบบสองโมด คือ

$${}_T \langle 0 | (\Delta \hat{X}(\delta, \phi))^2 | 0 \rangle_T = \frac{1}{4}, \quad (161)$$

ดังนั้น  $\langle (\Delta \hat{X}(\delta, \phi))^2 \rangle$  มีค่าน้อยกว่ากรณีของสถานะสุญญากาศเมื่อ  $r > 0$

### 3.2 พลศาสตร์ของสนามไฟฟ้าในท่อดวงแหวนสั้นพ้องแผนด้า

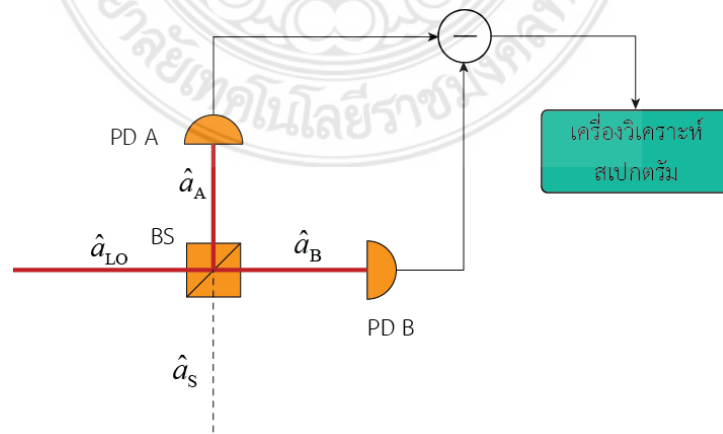
ให้  $E_{in}$  ,  $E_{out}$  สนามไฟฟ้าขาเข้าและขาออกที่วงแหวนสั้นพ้องแผนด้าตามลำดับ จะได้ความสัมพันธ์

$$\left| \frac{E_{out}}{E_{in}} \right|^2 = (1-\gamma)^2 \left[ 1 - \frac{\kappa [1 - (1-\gamma)^2 \tau^2]}{1 + (1-\gamma)^2 (1-\kappa)\tau - 2(1-\gamma)\sqrt{1-\kappa\tau \cos \phi}} \right] \quad (162)$$

โดยที่  $\tau = \exp(-\alpha L/2)$  คือ สัมประสิทธิ์การสูญเสียความเข้มในการแผ่วนครบหนึ่งรอบของสนามไฟฟ้า ,  $L$  คือ ความยาวหรือเส้นรอบวงของวงแหวนพ้องแผนด้า ,  $\kappa$  คือ สัมประสิทธิ์คู่ควบความเข้มสนามไฟฟ้าที่บริเวณรอยต่อ และ  $\gamma$  คือ สัมประสิทธิ์คู่ควบการสูญเสียความเข้มสนามไฟฟ้า

### 3.3 การประยุกต์วิธีโฮโมดาายแบบสมดุลกับการสั้นแกว่งเฉพาะที่ไมโนโครมาติก

วิธีการโฮโมดาายแบบสมดุลเชิงแสงเพื่อวัดสัญญาณรบกวนควอดเรเจอร์ของสัญญาณแสง การจัดอุปกรณ์ดังรูปที่ 3.1





รูปที่ 3.1 แสดงแผนภาพของเครื่องมือโฮโมดาต แสงตัวสั้นเฉพาะที่อยู่ในสถานะโคฮีเรนซ์แบบโมดเดี่ยว ค่ากำลังของความต่างกระแสไฟฟ้าถูกวัดโดยเครื่องวิเคราะห์สเปกตรัม

สัญญาณแสง  $\hat{a}_s$  ผสมกับตัวแยกลำแสงด้วยตัวสั้นแวงโมโนโครมาติกเฉพาะที่  $\hat{a}_{LO}$  ที่อยู่ในสถานะโคฮีเรนซ์ เอาท์พุททั้งสอง  $\hat{a}_{A,B}$  ถูกตรวจจับด้วยตัวตรวจจับโฟโตดีเทคเตอร์ PD A และ PD B ตามลำดับ และค่ากำลังสเปกตรัมของกระแสไฟฟ้าของแต่ละอันก็สามารถวัดได้ด้วยตัววิเคราะห์สเปกตรัม จากความสัมพันธ์อินพุท เอาท์พุทของตัวแยกลำแสง BS สนามไฟฟ้าขาออกสามารถเขียนได้ว่า

$$\hat{a}_A(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \hat{a}_{LO}(t) + i\hat{a}_s(t) \}, \quad (163)$$

$$\hat{a}_B(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ i\hat{a}_{LO}(t) + \hat{a}_s(t) \}, \quad (164)$$

ตามลำดับ เนื่องจากตัวสั้นเชิงแสงเฉพาะที่ อยู่ในสถานะโคฮีเรนซ์ ดังนั้น ตัวดำเนินการการทำลายจึงสามารถเป็นจำนวนเชิงซ้อนได้

$$\hat{a}_{LO}(t) = \alpha e^{-i\omega t}, \quad (165)$$

$$\alpha = |\alpha_{\text{mono}}| e^{i\theta} \quad (166)$$

โดยปกติการสถานะสูญญากาศบีบอัดผลิตโดยผลึกไม่เชิงเส้นจะมีการกระจายความถี่ในช่วง  $\Delta\omega > 10$  MHz อย่างไรก็ตามเราสามารถละทิ้งองค์ประกอบความถี่ของสนามไฟฟ้าสัญญาณอื่น  $\hat{a}_{\omega\pm\delta} e^{i(\omega\pm\delta)t}$  เนื่องจากตัวแยกสเปกตรัมวัดกำลังของบีตส์  $\delta$  ดังนั้น สนามไฟฟ้าของสัญญาณจึงสามารถเขียนได้ว่า

$$\hat{a}_s(t) = \hat{a}_{\omega+\delta} e^{-i(\omega+\delta)t} + \hat{a}_{\omega-\delta} e^{-i(\omega-\delta)t} \quad (167)$$

แทนสมการ และ ลงในสมการ และ จะได้

$$\hat{a}_A(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \alpha e^{-i\omega t} + i\hat{a}_{\omega+\delta} e^{-i(\omega+\delta)t} + i\hat{a}_{\omega-\delta} e^{-i(\omega-\delta)t} \right) \quad (168)$$

$$\hat{a}_B(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \alpha e^{-i\omega t} + \hat{a}_{\omega+\delta} e^{-i(\omega+\delta)t} + \hat{a}_{\omega-\delta} e^{-i(\omega-\delta)t} \right) \quad (169)$$

ความแตกต่างระหว่างกระแสไฟฟ้าระหว่าง PD A และ PD B กำหนดโดย

$$\begin{aligned} \Delta\hat{I} &= C(a_A^\dagger(t)\hat{a}_A(t) - \hat{a}_B^\dagger(t)\hat{a}_B(t)) \\ &= iC \left[ \alpha^* \hat{a}_{\omega+\delta} - \alpha \hat{a}_{\omega-\delta}^\dagger e^{-i\delta t} + (\alpha^* \hat{a}_{\omega-\delta} - \alpha \hat{a}_{\omega+\delta}^\dagger e^{i\delta t}) \right] \\ &= C |\alpha_{\text{mono}}| \left[ \hat{a}_{\omega+\delta} e^{-i(\delta t + (\theta - \pi/2))} + \hat{a}_{\omega+\delta}^\dagger e^{i(\delta t + (\theta - \pi/2))} \right. \\ &\quad \left. + \hat{a}_{\omega-\delta} e^{-i(-\delta t + (\theta - \pi/2))} + \hat{a}_{\omega-\delta}^\dagger e^{i(-\delta t + (\theta - \pi/2))} \right] \\ &= 2\sqrt{2} |\alpha_{\text{mono}}| \hat{X}(\delta, \theta - \pi/2) \end{aligned} \quad (170)$$

โดยที่ คอแตรเจอร์แบบสองโมด  $\hat{X}(\delta, \theta)$  นิยามตามสมการ (52) จากทฤษฎีไวเนอร์-ซินท์ไซน์ (Wiener - Khintchine) ฟังก์ชันสเปกตรัมความหนาแน่น  $\langle \hat{S}_{\text{mono}} \rangle$  ของ  $\Delta \hat{I}$  นิยามว่า

$$\langle \hat{S}_{\text{mono}}(\delta') \rangle = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \langle \Delta \hat{I}(t) \Delta \hat{I}(t + \tau) \rangle \cos \delta' \tau \quad (171)$$

แทนสมการ (73) ลงในสมการ (74) จะได้

$$\langle \hat{S}_{\text{mono}}(\delta') \rangle = 8(C |\alpha_{\text{mono}}|)^2 \langle \hat{X}^2(\delta, \theta - \pi/2) \rangle \delta(\delta' - \delta) \quad (172)$$

โดยที่  $\delta(\delta' - \delta)$  คือ ดิแรกเดลต้าฟังก์ชัน ถ้าสนามไฟฟ้าของสัญญาณอยู่ในสถานะสุญญากาศ ดังนั้นสัญญาณรบกวนที่วัดได้ คือ

$$\langle \hat{S}_{\text{mono}}(\delta, \theta) \rangle_{\text{vac}} = 2C |\alpha_{\text{mono}}|^2 \quad (173)$$

สเปกตรัมกำลังของความต่างกระแสไฟฟ้าซึ่งทำให้ปกติแล้วด้วยระดับสัญญาณรบกวนสุญญากาศ คือ

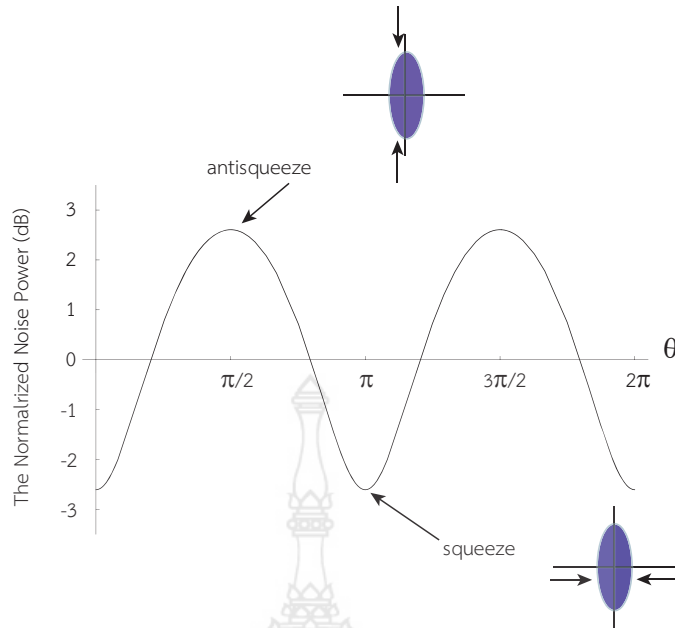
$$\hat{S}_{\text{mono}} = 4\hat{X}^2(\delta, \theta - \pi/2) \quad (174)$$

ยังพบอีกว่า สัญญาณรบกวนคอแตรเจอร์จากทิศทางต่างๆสามารถวัดได้โดยการเปลี่ยนเฟสของตัวส่งเฉพาะที่

เมื่อสัญญาณของสถานะ  $|\psi\rangle$  เป็นสถานะสุญญากาศบีบอัดแบบสองโมด ค่าคาดหวังของสเปกตรัมกำลังเขียนได้ว่า

$$\langle \psi | \hat{S}_{\text{mono}}(\delta, \theta) | \psi \rangle = \cosh 2r - \cos(\phi - 2\theta + \pi) \sinh 2r \quad (175)$$

โดยที่  $\phi$  คือ เฟสของสนามไฟฟ้าที่ถูกบีบเข้ามาในกระบวนการขยายสัญญาณเชิงแสงพาราเมตริก ถ้าไม่มีการสูญเสียใดๆเกิดขึ้น เราสามารถให้  $\phi = \pi$  รูปที่ 3.2 แสดงความไม่อิสระของกำลังสัญญาณรบกวนที่ปกติแล้วต่อเฟสของตัวส่งแวงเฉพาะที่  $\theta$  เมื่อพารามิเตอร์บีบอัด  $r = 0.3$  การบีบอัดสูงสุด คือ -2.6 dB และการต่อต้านการบีบอัด คือ +2.6 dB สามารถสังเกตได้เมื่อ  $\theta = 0$  และ  $\theta = \pi/2$  ตามลำดับ



รูปที่ 3.2 ความไม่อิสระของกำลังที่ปกติแล้วที่ขึ้นกับมุมเฟสของการสั่นเฉพาะที่มีค่าพารามิเตอร์บีบอัด  $r = 0.3$  กำลังของสัญญาณรบกวนที่เป็นปกติแล้วมีหน่วยเป็นเดซิเบล (dB) ซึ่งได้มาจากสูตร  $10 \log_{10} \langle \hat{S} \rangle$

### 3.4 การเหลื่อมทับกันเชิงปริภูมิของลำแสงสัญญาณกับตัวสั่นเฉพาะที่

ที่ผ่านมาเรายังไม่ได้พิจารณาโหมดปริภูมิของสัญญาณแสงและแสงของตัวสั่นแกว่งเฉพาะที่ตั้งในทางแฝงแล้วต้องมีอยู่เช่นเดียวกัน เนื่องจากวิธีไฮโมคตายัดสัญญาณควอเดรเจอร์ของสนามไฟฟ้าของโหมดปริภูมิว่าเป็นของตัวสั่นแกว่งเฉพาะที่ ซึ่งการเหลื่อมซ้อนทับกันเชิงปริภูมิระหว่างสัญญาณแสงและตัวสั่นแกว่งเฉพาะที่มีความสำคัญมาก ให้  $\xi$  เป็นการเหลื่อมซ้อนทับกันระหว่างการสั่นเฉพาะที่กับลำแสงสัญญาณ ตัวสั่นแกว่งเฉพาะที่แบ่งออกเป็นสองโหมด ดังนี้

$$\hat{a}_{LO} = \xi \hat{a}_{LO}^{\parallel} + \sqrt{1 - \xi^2} \hat{a}_{LO}^{\perp}, \quad (176)$$

โดยที่ โหมดปริภูมิของ  $\hat{a}_{LO}^{\parallel}$  มีค่าเช่นเดียวกับลำแสงสัญญาณขณะที่โหมดปริภูมิของ  $\hat{a}_{LO}^{\perp}$  ตั้งฉากกับของลำแสงสัญญาณ สมการ (66) และสมการ (67) สามารถอนุพัทธ์ต่อไปสู่สองโหมด ได้ คือ

$$\hat{a}_A^{\parallel}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \hat{a}_{LO}^{\parallel}(t) + i \hat{a}_s^{\parallel}(t) \}, \quad (177)$$

$$\hat{a}_B^{\parallel}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ i \hat{a}_{LO}^{\parallel}(t) + \hat{a}_s^{\parallel}(t) \}, \quad (178)$$

$$\hat{a}_A^{\perp}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ \hat{a}_{LO}^{\perp}(t) + i \hat{a}_s^{\perp}(t) \}, \quad (179)$$

$$\hat{a}_B^{\perp}(t) = \frac{1}{\sqrt{2}} \{ i \hat{a}_{LO}^{\perp}(t) + \hat{a}_s^{\perp}(t) \}. \quad (180)$$

ดังนั้น ตัวดำเนินการทำลายของตัวสั้นเฉพาะที่ในส่วนที่ตั้งฉากและส่วนที่ขนานในสถานะโคฮีเรนต์ จึงเขียนได้ว่า

$$\hat{a}_{LO}^{\parallel}(t) = \xi \alpha e^{-i\omega t}, \quad (181)$$

$$\hat{a}_{LO}^{\perp}(t) = \sqrt{1 - \xi^2} \alpha e^{-i\omega t}, \quad (182)$$

ตามลำดับ กำลังของความต่างของกระแสไฟฟ้า คือ

$$\hat{S}_{\text{mono}}(\delta, \theta) = \xi^2 \hat{S}_{\text{mono}}^{\parallel}(\delta, \theta) + (1 - \xi^2) \hat{S}_{\text{mono}}^{\perp}(\delta, \theta), \quad (183)$$

โดยที่

$$\hat{S}_{\text{mono}}^{(\perp)}(\delta, \theta) = 8(C | \alpha_{\text{mono}} | \hat{X}^{(\perp)}(\delta, \theta))^2, \quad (184)$$

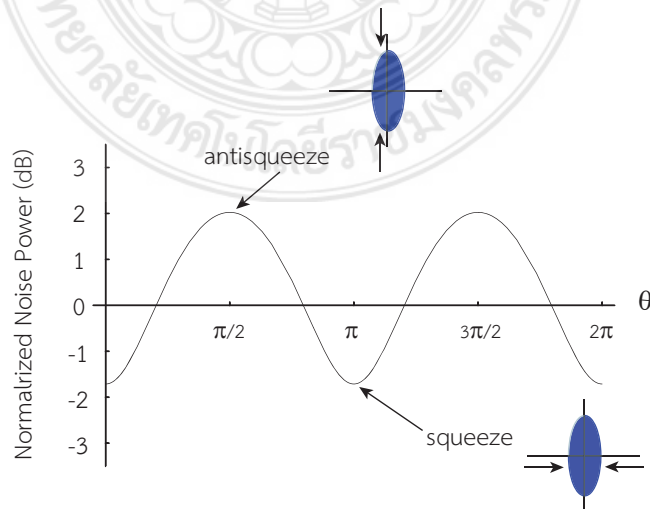
โดยที่  $\hat{X}^{(\perp)}$  คือ สัญญาณรบกวนควอเทรเจอร์ของโมดขนาน(ตั้งฉาก)กับตัวสั้นแกว่งเฉพาะที่ เนื่องจากสถานะที่ต้องกระทำคือสถานะสุญญากาศด้วยตัวดำเนินการ  $\hat{X}^{\perp}$  ดังนั้น สเปกตรัมกำลังที่ปกติแล้วของความแตกต่างกระแสไฟฟ้า จึงเขียนได้เป็น

$$\hat{S}_{\text{mono}}(\delta, \theta) = 4\xi^2 (\hat{X}^{\parallel}(\delta, \theta))^2 + 1 - \xi^2 \quad (185)$$

ซึ่งสามารถขยายไปสู่กรณีสุญญากาศบีบอัดที่สูญเสียความเข้ม  $L$  ก่อนที่จะมาถึงตัวตรวจจับสัญญาณไฮโมดาได้ สเปกตรัมกำลังที่ปกติแล้วจึงเขียนได้ว่า

$$\hat{S}_{\text{mono}}(\delta, \theta) = 4\zeta^2 (\hat{X}^{\parallel}(\delta, \theta))^2 + 1 - \zeta, \quad (186)$$

โดย  $\zeta = (1 - L)\xi^2$  คือ ปัจจัยสัมพันธ์การตรวจจับ รูปที่ 3.3 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสเปกตรัมกำลังและ  $\theta$  เฟสของตัวสั้นแกว่งเฉพาะที่ เมื่อพารามิเตอร์บีบอัด  $r = 0.3$  ค่าสภาพที่จะมองเห็นได้  $\xi = 0.95$  และค่าการสูญเสีย  $L = 0.2$  ค่าการบีบอัดสูงสุด (-1.7 dB) และค่าต่อต้านการบีบอัด (+2.0 dB) ถูกสังเกตได้โดยการปรับค่าเฟสของตัวสั้นแกว่งเฉพาะที่ สังเกตว่าระดับการบีบอัดลดลง 0.9 dB (=2.6 dB - 1.7 dB) ขณะที่ระดับการต่อต้านการบีบอัดลดลงเพียง 0.6 dB (=2.6 dB - 2.0 dB) การบีบอัดจึงมีความไวต่อการสูญเสียหรือค่าสภาพที่จะมองเห็นมากกว่าการต่อต้านการบีบอัด



รูปที่ 3.3 กราฟความสัมพันธ์ระหว่างสเปกตรัมกำลังซึ่งขึ้นกับมุมเฟสของการสั้นเฉพาะที่ ค่าพารามิเตอร์การบีบอัด  $r=0.3$  สภาพมองเห็นได้  $\xi=0.95$  และการสูญเสีย  $L=0.2$

ในทฤษฎีควอนตัมของการแผ่รังสีการสูญเสียไม่ได้ทำให้เกิดการลดค่าของจำนวนโฟตอนแต่ยังมีความเกี่ยวข้องกับสัญญาณการรบกวนสัญญาณภาค พิจารณาสถานะสัญญาณภาคบีบอัดบริสุทธิ์ซึ่งมีสัญญาณการรบกวนควอเดรเจอร์ เป็น

$$\langle \hat{x}_\phi^2 \rangle = \frac{1}{8} \left( = \frac{1}{2} \times \langle 0 | \hat{x}_\phi^2 | 0 \rangle \right) \quad (187)$$

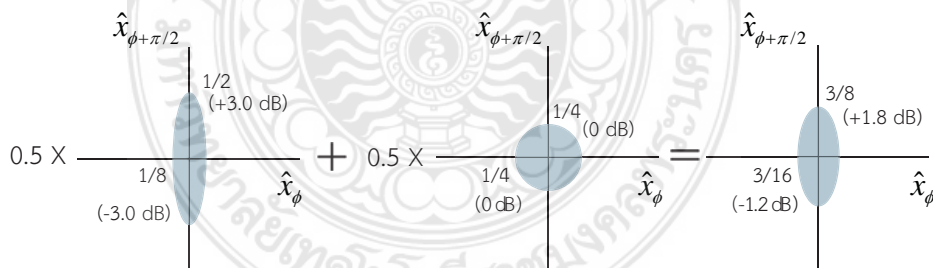
$$\langle \hat{x}_{\phi+\pi/2}^2 \rangle = \frac{1}{2} \left( = 2 \times \langle 0 | \hat{x}_\phi^2 | 0 \rangle \right) \quad (188)$$

ตามลำดับ กล่าวอีกอย่าง ระดับการบีบอัดและการต่อต้านการบีบอัดของสถานะสัญญาณภาคบีบอัด คือ -3.0 dB และ +3.0 dB ตามลำดับ ถ้าครึ่งหนึ่งของสัญญาณภาคการบีบอัดถูกดูดกลืนและสัญญาณรบกวนสัญญาณภาคถูกฉีดเข้าไปใส่สถานะดังรูปที่ (3.4) สัญญาณรบกวนควอเดรเจอร์เปลี่ยนแปลงค่า ดังนี้

$$\langle \hat{x}_\phi^2 \rangle \rightarrow 0.5 \times \frac{1}{8} + 0.5 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{16}, \quad (189)$$

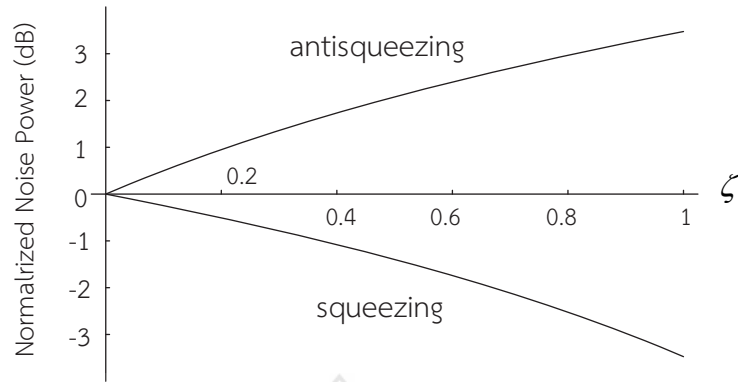
$$\langle \hat{x}_{\phi+\pi/2}^2 \rangle \rightarrow 0.5 \times \frac{1}{2} + 0.5 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{8}, \quad (190)$$

ตามลำดับ กล่าวอีกอย่าง ระดับการบีบอัดและต่อต้านการบีบอัดของสถานะสัญญาณภาคเปลี่ยนจาก -1.2 dB และ +1.8 dB ตามลำดับ ขณะที่ระดับการบีบอัดเปลี่ยนแปลง 1.8 dB ระดับการต้านการบีบอัดลดลงเพียง 1.2 dB ความแตกต่างเพิ่มขึ้นถ้าระดับการบีบอัดเริ่มต้นมีค่าสูงกว่า ระดับสถานะสูงๆ สัญญาณภาคบีบอัดมีความไวต่อการสูญเสียอย่างมาก จากการพิจารณา การบีบอัดมากกว่า -3 dB ไม่สามารถบรรลุได้ด้วยการมีอยู่ของการสูญเสีย 50%



รูปที่ 3.4 ไดอะแกรมการสูญเสีย สถานะสัญญาณภาคบีบอัด -3 dB มีค่าการสูญเสีย  $L=0.5$  หลังจากการดูดกลืนระดับการบีบอัดที่สังเกตได้ลดลงเป็น -1.2 dB

การขึ้นอยู่ของการบีบอัดและการต่อต้านการบีบอัดสูงสุดต่อสัมประสิทธิ์การตรวจจับ แสดงในรูปที่ 3.5 ด้วยพารามิเตอร์การบีบอัด  $r=0.3$



รูปที่ 3.5 แสดงความสัมพันธ์ระหว่างสเปกตรัมกำลังและประสิทธิภาพการตรวจจับ  $\zeta$  โดยมีค่าพารามิเตอร์การบีบอัด  $r=3$

### 3.5 การสร้างสถานะสูญญากาศบีบอัดด้วยวิธีเรโซแนนซ์

การสร้างสถานะบีบอัดจะต้องเซตเครื่องมือออกเป็น 2 ส่วนหลัก คือ ดับเบิลอร์ และ ตัวขยายพาราเมตริกซ์เชิงแสง(ตัวบีบอัด) จึงต้องศึกษาทฤษฎีทัศนศาสตร์ไม่เชิงเส้นลำดับที่สองในโพรง

#### 3.5.1 โครงสร้างการแผ่ของคลื่นในตัวกลางไม่เชิงเส้น

เมื่อฉายแสงตกกระทบตัวกลางที่ตอบสนองต่อแสงแบบไม่เชิงเส้น แสงจะไปเหนี่ยวนำให้ตัวกลางเกิดโพลาไรเซชันขึ้น ซึ่งจะเป็นสัดส่วนกับระดับขนาดที่สองหรือสูงกว่าของสนามไฟฟ้า ดังนั้นโพลาไรเซชันจึงประกอบด้วยสองส่วนหลัก คือ ส่วนที่ตอบสนองต่อแสงแบบเชิงเส้น  $P_L$  และแบบที่ตอบสนองต่อแสงไม่เป็นเชิงเส้น  $P_{NL}$  โดยที่โพลาไรเซชันรวม เขียนได้ว่า

$$P = P_L + P_{NL} \quad (191)$$

โดยที่

$$P_L = \epsilon_0 \chi^{(1)} \cdot \mathbf{E}, \quad (192)$$

$$P_{NL} = \epsilon_0 \chi^{(2)} \cdot \mathbf{E}\mathbf{E} + \epsilon_0 \chi^{(3)} \cdot \mathbf{E}\mathbf{E}\mathbf{E} + \dots \quad (193)$$

โดยที่  $\chi^{(i)}$  คือ ค่าความอ่อนไหวทางไฟฟ้าลำดับที่  $i$  ซึ่งโดยทั่วไปเป็นเทนเซอร์ลำดับที่  $i+1$  จากสมการแมกซ์เวลล์ การแผ่ของคลื่นแม่เหล็กไฟฟ้าในตัวกลาง คือ

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu_0 \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = \mu_0 \frac{\partial^2 P_{NL}}{\partial t^2} \quad (194)$$

โดยที่  $\epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi^{(1)})$  เราสนใจเพียงผลเฉลยของความไม่เป็นเชิงเส้นของตัวกลางในลำดับที่ 2 เท่านั้น สมมติว่าเราสนใจเฉพาะผลเฉลยแบบคลื่นระนาบที่มีโพลาไรซ์ตามแนวแกน  $x$  เท่านั้น และคลื่นกำลังแผ่ไปตามแนวแกน  $z$  ด้วยความถี่  $\omega_1, \omega_2$  และ  $\omega_3$  ดังนี้

$$E^{(\omega_i)}(z, t) = \frac{1}{2} E_1(z) e^{i(\omega_i t - k_1 z)} + c.c., \quad (195)$$

$$E^{(\omega_2)}(z, t) = \frac{1}{2} E_2(z) e^{i(\omega_2 t - k_2 z)} + c.c., \quad (196)$$

$$E^{(\omega_3)}(z, t) = \frac{1}{2} E_3(z) e^{i(\omega_3 t - k_3 z)} + c.c., \quad (197)$$

โดยที่  $E_i$  คือ แอมพลิจูดเชิงซ้อนที่แปรค่าอย่างช้าๆ และเราได้ละทิ้งส่วนที่ขึ้นกับเวลาของมันด้วย ดังนั้น สนามไฟฟ้าชั่วขณะ คือ

$$E(z, t) = E^{(\omega_1)}(z, t) + E^{(\omega_2)}(z, t) + E^{(\omega_3)}(z, t) \quad (198)$$

เพื่อที่จะควบคุมสนามผ่านโพลาริซั่มไม่เชิงเส้น เราสมมติว่า  $\omega_3 = \omega_1 + \omega_2$  และยังสมมติให้  $\chi^{(2)}$  เป็น ปริมาณสเกลาร์ และ  $P$  มีทิศทางขนานกับแกน  $x$  สมการ (96) จึงเขียนใหม่ได้ว่า

$$\nabla^2 E(z, t) - \mu_0 \varepsilon \frac{\partial^2 E(z, t)}{\partial t^2} = \mu_0 \varepsilon_0 \chi^{(2)} \frac{\partial^2}{\partial t^2} (E(z, t)^2) \quad (199)$$

เมื่อใช้การประมาณให้แอมพลิจูดแปรค่าช้ามากๆ และการประมาณเฟส จึงได้สมการพื้นฐานอธิบาย อันตรกิริยาลำดับที่ 2 คือ

$$\frac{dE_1}{dz} = -\frac{i\omega_1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} \varepsilon_0 \chi^{(2)} E_3 E_2^* e^{-i(k_3 - k_2 - k_1)z}, \quad (200)$$

$$\frac{dE_2^*}{dz} = \frac{i\omega_2}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} \varepsilon_0 \chi^{(2)} E_2 E_3^* e^{-i(k_3 + k_2 + k_1)z}, \quad (201)$$

$$\frac{dE_3}{dz} = -\frac{i\omega_3}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} \varepsilon_0 \chi^{(2)} E_1 E_2 e^{-i(k_3 + k_2 + k_1)z}. \quad (202)$$

### 3.5.2 การผลิตฮาร์โมนิกเชิงแสงลำดับที่ 2

ผลึกไม่แผ่รังสีด้วยตัวเองแบบไม่เชิงเส้นเมื่อกระตุ้นด้วยแสงเลเซอร์หรือเรียกสั้นๆว่าแสง พื้นฐานทำให้เกิดคลื่นฮาร์โมนิกลำดับที่ 2 กระบวนการนี้อธิบายได้ด้วยสมการ (200) – (202) ความถี่ แสงพื้นฐานคือ  $\omega$  และแอมพลิจูดคือ  $\mathcal{E}^{(\omega)}$  ดังนั้น จึงให้  $\omega_1 = \omega_2 = \omega$  และ  $\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_2 = \mathcal{E}^{(\omega)}$  แสงฮาร์โมนิกลำดับที่ 2 คือ  $\mathcal{E}_3 = \mathcal{E}^{(2\omega)}$  และ  $\omega_3 = 2\omega$  สมการ (202) แปลงไปเป็น

$$\frac{d\mathcal{E}^{(2\omega)}}{dz} = -i\omega \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} \varepsilon_0 \chi^{(2)} (\mathcal{E}^{(\omega)})^2 e^{i\Delta k z} \quad (203)$$

โดยที่  $\Delta k = k_3 - 2k_1$  เมื่ออินทิเกรตสมการนี้จะได้แอมพลิจูดของแสงฮาร์โมนิกลำดับที่ 2 ที่ผิวหน้าของผลึก  $z = d$  คือ

$$\mathcal{E}^{(2\omega)}(d) = -i\omega \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} \varepsilon_0 \chi^{(2)} (\mathcal{E}^{(\omega)})^2 \frac{e^{i\Delta k d} - 1}{i\Delta k} \quad (204)$$

และกำลังแสงเอาท์พุทของฮาร์โมนิกลำดับที่ 2 คือ

$$\begin{aligned} \mathcal{I}^{(2\omega)}(d) &= \frac{1}{2} c \varepsilon_0 |\mathcal{E}^{(2\omega)}|^2 \\ &= \left( \frac{\mu_0}{\varepsilon} \right)^{3/2} (\omega \varepsilon_0 \chi^{(2)})^2 (\mathcal{I}^{(\omega)})^2 d^2 \frac{\sin^2(\Delta kd / 2)}{(\Delta kd / 2)^2} \end{aligned} \quad (205)$$

กำลังของแสงฮาร์โมนิกลำดับที่ 2 เป็นสัดส่วนโดยตรงกับกำลังสองของแสงพื้นฐาน จึงนิยาม สัมประสิทธิ์การผันกลับ ดังนี้

$$\eta = \frac{\mathcal{I}^{(2\omega)}}{(\mathcal{I}^{(\omega)})^2} = \left( \frac{\mu_0}{\varepsilon} \right)^{3/2} (\omega \varepsilon_0 \chi^{(2)})^2 d^2 \frac{\sin^2(\Delta kd / 2)}{(\Delta kd / 2)^2} \quad (206)$$

และนิยามปัจจัยการสูญเสียจากการผันกลับ คือ

$$\beta = \frac{\mathcal{I}^{(2\omega)}}{\mathcal{I}^{(\omega)}} = \left( \frac{\mu_0}{\varepsilon} \right)^{3/2} (\omega \varepsilon_0 \chi^{(2)})^2 \mathcal{I}^{(\omega)} d^2 \frac{\sin^2(\Delta kd / 2)}{(\Delta kd / 2)^2} \quad (207)$$

### 3.5.3 การเทียบเฟสเสมือน

เฟสของการโพลาริเซชันไม่เชิงเส้นวิวัฒน์ด้วยขนาด  $2k_1$  และของคลื่นไฟฟ้าด้วยขนาด  $k_3$  ซึ่ง  $\Delta k = k_3 - 2k_1$  คือ ความคลาดของเลขคลื่นของโพลาริเซชันไม่เชิงเส้นจากคลื่นไฟฟ้า เมื่อ  $2k_1 = k_3$  เฟสเหล่านี้ไปสู่ลำดับขั้นตอน เงื่อนไขนี้ถูกอ้างว่าเป็นการเทียบเฟส ในขณะที่ความเข้มของสนามเพิ่มขึ้นเป็นสัดส่วนตาม  $z^2$  เมื่อ  $\Delta k = 0$  ฟังก์ชันของความเข้มสนามมีลักษณะเป็นคาบเมื่อ  $\Delta k \neq 0$  ดังนั้น ความเข้มก็ไม่เลื่อนจางไป

ดัชนีหักเหเพิ่มขึ้นอย่างปกติกับค่า  $\omega$  หรือ  $k$  ในที่นี่จะใช้เทคนิคของยาริฟ ซึ่งเป็นวิธีของการเทียบเฟส โดยใช้ผลึกที่ไม่เป็นเชิงเส้นแล้วทำการมอดูเลตแบบมีคาบเป็นช่วงๆโดยการย้อนทิศทางของแกนหลักอย่างเป็นคาบ สัมประสิทธิ์ไม่เชิงเส้น  $\chi^{(2)}(z)$  สามารถกระจายในรูปของอนุกรมฟูรีเยร์ คือ

$$\chi^{(2)}(z) = \chi_0^{(2)} \left[ \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m \exp\left( im \frac{2\pi}{\Lambda} z \right) \right], \quad (208)$$

โดยที่

$$a_m = \frac{1}{\Lambda} \int_0^\Lambda \frac{\chi^{(2)}(z)}{\chi_0^{(2)}} \exp\left( -im \frac{2\pi}{\Lambda} z \right) dz \quad (209)$$

และ  $\Lambda$  คือคาบของ  $\chi^{(2)}(z)$  แทนค่าสมการ (208) ลงในสมการ (200) จะได้

$$\frac{d\mathcal{E}_1}{dz} = -\frac{i\omega_1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon}} \varepsilon_0 \chi_0^{(2)} \mathcal{E}_3 \mathcal{E}_2^* \exp\left[ i \left( m \frac{2\pi}{\Lambda} - k_3 + k_2 + k_1 \right) z \right] \quad (210)$$

ถ้ามีจำนวนเต็ม  $m$  ที่สอดคล้องกับเงื่อนไข

$$m \frac{2\pi}{\Lambda} = k_3 - k_2 - k_1 \quad (211)$$

การเทียบเฟสก็เป็นจริง ถ้า  $\chi^{(2)}(z)$  เริ่มจาก  $\chi_0^{(2)}$  ถึง  $-\chi_0^{(2)}$  ทุกๆค่าของ  $\Lambda/2$  ซึ่งจะได้



$$a_m = \frac{1 - \cos m\pi}{m\pi} \quad (213)$$

ถ้าเลือก  $m=1$  สัมประสิทธิ์ไม่เชิงเส้นจึงเขียนได้ว่า

$$\chi_{eff}^{(2)} = a_1 \chi_0^{(2)} = \frac{2}{\pi} \chi_0^{(2)} \quad (214)$$

### 3.5.4 เงื่อนไขที่ดีที่สุดในการโฟกัสลำแสงลงใส่ผลึกที่ไม่เป็นเชิงเส้น

ลำแสงเกาเซียนซึ่งมีภาคตัดขวางจำกัดมีช่วงความยาวโฟกัสรวม  $z_0 = \pi\omega_0^2 n / \lambda$  เป็นตัวบอกระยะทางจากเอวของลำแสงซึ่งพื้นที่ของลำแสงมีค่าเป็นสองเท่าของช่วงเอวลำแสง ถ้าละทิ้งการบานออกของลำแสงจะได้สัมประสิทธิ์การผันกลับ คือ

$$\eta = \left( \frac{\mu_0}{\varepsilon} \right)^{3/2} \frac{(\omega \varepsilon_0 \chi^{(2)} d) \sin^2(\Delta kd / 2)}{\pi \omega_0^2 (\Delta kd / 2)^2} \quad (215)$$

### 3.6. แฮมิลโตเนียนของระบบ

เมื่อโฟตอนโมดปั๊มมีอันตรกิริยากับผลึกที่มีการตอบสนองต่อลำแสงเลเซอร์พลังงานสูงที่ตกกระทบแบบไม่เชิงเส้นระดับพลังงานของอะตอมผลึกก็ถูกกระตุ้นขึ้นไปอยู่ในสถานะกระตุ้นจนกระทั่งอะตอมของผลึกที่ไม่สมมาตรได้ปลดปล่อยโฟตอนออกมาสองโมด ได้แก่ โฟตอนโมดสัญญาณ ( $s$ ) และโฟตอน โมดนิ่งเฉย ( $i$ ) ออกมา สามารถเขียนแฮมิลโตเนียนของอันตรกิริยานี้ซึ่งเรียกว่า การผสมโฟตอนแบบสี่โมด ได้ว่า

$$\hat{H} = i\hbar \chi^{(3)} (\hat{a}_s^\dagger \hat{a}_i^\dagger \hat{a}_p^2 - \hat{a}_s \hat{a}_i \hat{a}_p^{\dagger 2}) \quad (216)$$

เมื่อ  $\hat{a}_s^\dagger, \hat{a}_i^\dagger, \hat{a}_p^\dagger$  คือ ตัวดำเนินการการสร้างโฟตอนโมดสัญญาณ โมดนิ่งเฉย และโมดปั๊ม ตามลำดับ เมื่อนำสมการ(216) เพื่อศึกษาการวิวัฒนาการในเวลาของตัวดำเนินการทั้งสามโมด จาก

$$i\hbar \frac{d}{dt} \hat{\rho} = [\hat{H}, \hat{\rho}] \quad (217)$$

เมื่อ  $\hat{\rho}$  คือ ตัวดำเนินการเมตริกซ์หนาแน่นของระบบ ซึ่งมีความสัมพันธ์กับ ความน่าจะเป็นของการเลื่อนสถานะของโฟตอน  $P(\mathbf{a}, \mathbf{a}^+)$  ในปริภูมิจำนวนเชิงซ้อน ดังนี้

$$\hat{\rho} = \int_D \hat{\Lambda}(\mathbf{a}, \mathbf{a}^+) P(\mathbf{a}, \mathbf{a}^+) d\mu(\mathbf{a}, \mathbf{a}^+) \quad (218)$$

เมื่อ  $\mathbf{a} \equiv (\alpha_p, \alpha_s, \alpha_i)$  และ  $\mathbf{a}^+ \equiv (\alpha_p^+, \alpha_s^+, \alpha_i^+)$  และ

$$\hat{\Lambda}(\mathbf{a}, \mathbf{a}^+) = \frac{|\mathbf{a}\rangle \langle (\mathbf{a}^+)^*|}{\langle (\mathbf{a}^+)^* | \mathbf{a} \rangle} \quad (219)$$

จึงทำให้ได้สมการการวิวัฒนาการของตัวดำเนินการที่สอดคล้อง คือ

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha_s = \chi^{(3)} \alpha_i^+ \alpha_p^2 + \sqrt{\chi^{(3)} \alpha_p / 2} \xi_1(t) \quad (220)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha_s^+ = \chi^{(3)} \alpha_i \alpha_p^{+2} + \sqrt{\chi^{(3)} \alpha_p^+ / 2} \xi_2(t) \quad (221)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha_i = \chi^{(3)} \alpha_s^+ \alpha_p^2 + \sqrt{\chi^{(3)} \alpha_p / 2} \xi_3(t) \quad (222)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha_i^+ = \chi^{(3)} \alpha_s \alpha_p^{+2} + \sqrt{\chi^{(3)} \alpha_p^+ / 2} \xi_4(t) \quad (223)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha_p = -\chi^{(3)} \alpha_s \alpha_i^2 \alpha_p^+ + \sqrt{\chi^{(3)} \alpha_s \alpha_i} \xi_5(t) \quad (224)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \alpha_p^+ = -\chi^{(3)} \alpha_s^+ \alpha_i^+ \alpha_p + \sqrt{\chi^{(3)} \alpha_s^+ \alpha_i^+} \xi_6(t) \quad (225)$$

โดยที่ สหสัมพันธ์ของสัญญาณการรบกวน คือ

$$\langle \xi_i(t) \xi_j(t') \rangle = \delta_{ij} \delta(t-t') \quad \text{โดยมี } \langle \xi_j \rangle = 0 \quad \text{โดยที่ } i, j = 1, 2, \dots, 6 \quad (226)$$

ซึ่งสมการการคู่ควบการวิวัฒน์ของตัวดำเนินการโมดเหล่านี้จะถูกนำไปแก้โดยการวิเคราะห์เชิงตัวเลขหาค่าต่อไปในบทที่ 4

ผลสืบเนื่องที่เกิดขึ้น คือ หากวงแหวนสั้นพ้องแพนดามีสถานะที่พอเหมาะ กล่าวคือ การเปลี่ยนแปลงไปมาระหว่างกันของโฟตอนทั้งสามโมด จะตรงกับกฎอนุรักษ์พลังงานและโมเมนตัม โฟตอนสถานะเกี่ยวพันกันในโมดสัญญาณและโมดนิ่งเฉยก็เกิดขึ้นตามมา และสถานะเกี่ยวพันกันของโฟตอน เขียนในรูปสมการเบลล์ในแบบสมมาตร ได้คือ

$$|\psi\rangle^{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_s \otimes |-\rangle_i \pm |-\rangle_s \otimes |+\rangle_i) \quad (227)$$

และสถานะแบบ อสมมาตร

$$|\phi\rangle^{(\pm)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (|+\rangle_s \otimes |+\rangle_i \pm |-\rangle_s \otimes |-\rangle_i) \quad (228)$$

สมการเหล่านี้ซึ่งมีประโยชน์มากในการประยุกต์ใช้ทางด้านสารสนเทศเชิงควอนตัมต่อไป ดังนั้น จึงจำเป็นต้องทดสอบบรรทัดฐานการมีสหสัมพันธ์ระหว่างกันของตัวดำเนินการที่เกี่ยวข้อง โดยอาศัยเงื่อนไขการเข้าคู่กันของความแปรปรวนค่าน้อยสุด  $V^{\text{inf}}$  ของตัวดำเนินการ  $\hat{X}_i$  และ  $\hat{Y}_i$  ตามสมการของเบลล์ ดังนี้

$$V^{\text{inf}}(\hat{X}_i) V^{\text{inf}}(\hat{Y}_i) < 1 \quad (229)$$

ซึ่งในอสมการนี้ จะนำมาประยุกต์ใช้เพื่อตรวจสอบค่าความสมมูลของตัวดำเนินการในโมดสัญญาณและโมดนิ่งเฉย ซึ่งจะวิเคราะห์เชิงตัวเลขตามเงื่อนไขของอสมการนี้ต่อไปในบทที่ 4

### 3.7 สหสัมพันธ์การบีบอัดภายนอก

ในทฤษฎีการรบกวนต่ำกว่าขีดกระตุ้น สเปกตรัมของสนามบีบอัด  $y_1$  ซึ่งอยู่ในรูป  $\langle \tilde{y}_1(\Omega_1) \tilde{y}_1(\Omega_2) \rangle$  โดยที่

$$\begin{aligned} \langle \tilde{y}_1(\Omega_1) \tilde{y}_1(\Omega_2) \rangle = & \langle \tilde{y}_1^{(1)}(\Omega_1) \tilde{y}_1^{(1)}(\Omega_2) \rangle + \\ & g^2 \langle \tilde{y}_1^{(1)}(\Omega_2) \tilde{y}_1^{(3)}(\Omega_1) + [\Omega_1 \leftrightarrow \Omega_2] \rangle + \dots \end{aligned} \quad (230)$$

อาศัยหลักของทฤษฎีการรบกวนอันดับที่ 1 ผลของการบีบอัดเชิงเส้นจึงกำหนดได้เป็น

$$\langle \tilde{y}_1(\Omega_1) \tilde{y}_1(\Omega_2) \rangle = -\frac{2\varepsilon\delta(\Omega_1 + \Omega_2)}{[\Omega_1^2 + (1 + \varepsilon)^2]} \quad (231)$$

ในทำนองเดียวกัน ส่วนเติมเต็มของสเปกตรัมแบบไม่บีบอัด คือ

$$\langle \tilde{x}_1^{(1)}(\Omega_1) \tilde{x}_1^{(2)}(\Omega_2) \rangle = -\frac{2\varepsilon\delta(\Omega_1 + \Omega_2)}{[\Omega_1^2 + (1 - \varepsilon)^2]} \quad (232)$$

สมการสเปกตรัมที่สมบูรณ์กรณีการบีบอัดทั้งแบบเชิงเส้นและไม่เชิงเส้น คือ

$$\begin{aligned} V(\Omega) = & \frac{\Omega^2 + (1 - \varepsilon)^2}{\Omega^2 + (1 + \varepsilon)^2} + \frac{4g^2\varepsilon^2\kappa}{[\Omega^2 + (1 + \varepsilon)^2]^2} \\ & \times \left\{ \frac{(\Omega^2 + 1 - \varepsilon^2)}{2\varepsilon\kappa(1 + \varepsilon^2)} + \frac{(1 - \varepsilon^2 + \kappa)(1 + \varepsilon) - \Omega^2}{(1 + \varepsilon)[\Omega^2 + (1 - \varepsilon + \kappa)^2]} \right. \\ & \left. - \frac{(1 + \varepsilon + \kappa)(1 + \varepsilon) - \Omega^2}{(1 + \varepsilon)[\Omega^2 + (1 - \varepsilon + \kappa)^2]} \right\} \end{aligned} \quad (233)$$

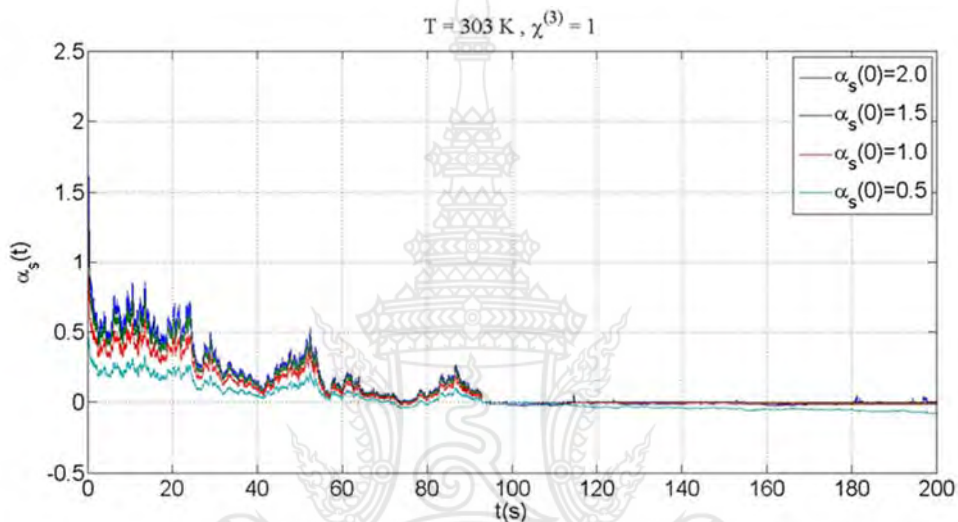
โดยที่  $\Omega = 2\omega / \kappa_1$  และ  $g = \sqrt{\frac{2\chi^2}{\kappa_1\kappa_2/2}}$  และ  $\kappa_1, \kappa_2$  คือ อัตราการสลายตัว กราฟแสดง

ความสัมพันธ์ระหว่าง  $V(\Omega)$  และ  $\Omega$  ด้วยค่า  $\varepsilon$  และ  $\kappa$  ต่างๆที่เกี่ยวข้อง ซึ่งจะวิเคราะห์ตามเงื่อนไขของสมการนี้ต่อไปในบทที่ 4

## บทที่ 4 ผลการวิเคราะห์ข้อมูล

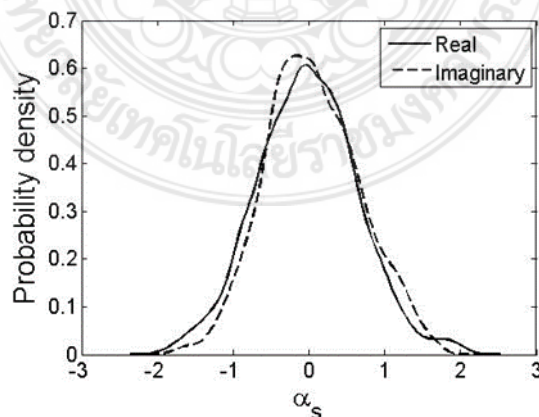
### 4.1 ผลการวิเคราะห์สมการเชิงตัวเลข

ผลเฉลยเชิงการวิเคราะห์เชิงตัวเลขของสมการ (224) – (229) ของตัวดำเนินการโฟตอนในโมดสัญญาณในสถานะสมดุลความร้อน ที่อุณหภูมิ 303 K ด้วยเงื่อนไขค่าเริ่มต้น ณ เวลา  $\alpha_s(0)$  สามารถแสดงได้ดังรูปที่



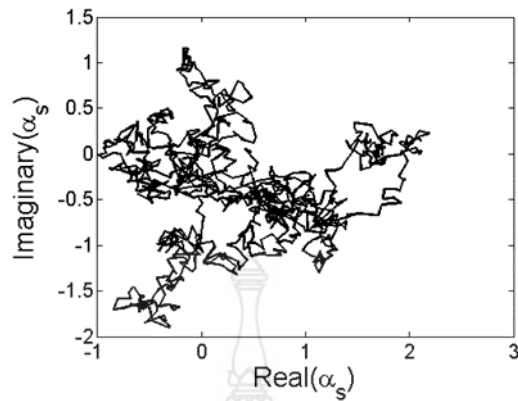
รูปที่ 4.1 แสดงการวิวัฒนาการตามเวลาของตัวดำเนินการโฟตอนในโมดสัญญาณ  $\alpha_s(t)$  ณ เวลา  $t$  ใดๆ

และยังพบว่า ตัวดำเนินการโฟตอนโมดสัญญาณนี้มีการแจกแจงความน่าจะเป็นที่ปกติอีกด้วยทั้งส่วนจริงและส่วนจินตภาพ ดังรูปที่



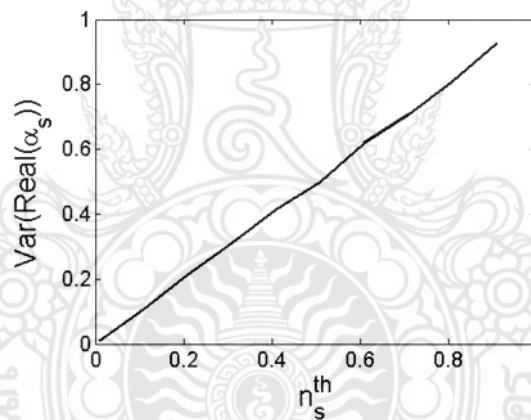
รูปที่ 4.2 การกระจายความหนาแน่นความน่าจะเป็นของตัวดำเนินการ  $\alpha_s$  มีค่าที่ยอมรับได้สำหรับค่าสังเกตต่างๆ

เมื่อนำการวิวัฒน์ของตัวดำเนินการส่วนจริงและส่วนจินตภาพมาเปรียบเทียบกับกันจะได้ผลดังรูปที่



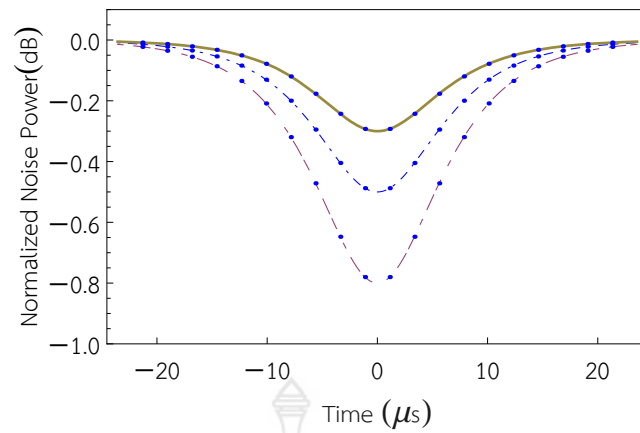
รูปที่ 4.3 เส้นวิถีของสถานะตัวดำเนินการสถานะสัญญาณโฟตอน  $\alpha_s$  ทั้งส่วนจริงและส่วนจินตภาพ ที่สอดคล้องกับสมการ (224)

ผลเฉลยจากสมการ (224) ยังสอดคล้องกับสมการของเบลล์ ดังรูปที่ 4.4

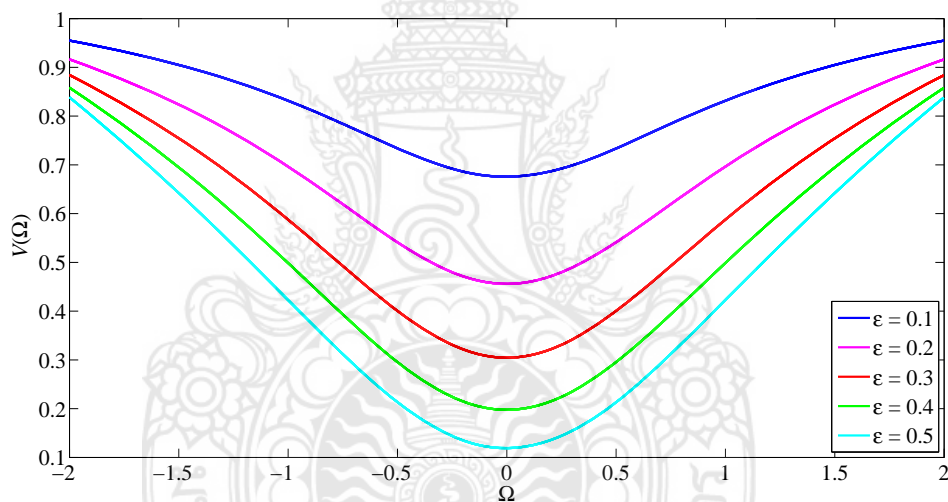


รูปที่ 4.4 ความแปรปรวนร่วม  $V^{inf}$  ของการวิวัฒน์สถานะของสัญญาณ  $\alpha_s$  มีค่าน้อยกว่าหนึ่งซึ่งความสอดคล้องกับสมการของเบลล์

การวัดกำลังของพัลส์ลำแสงโมดสัญญาณและพัลส์ลำแสงโมดนิ่งเฉย ณ เวลาต่างๆ ของโฟตอนคู่เกี่ยวพันกัน ได้ผลดังรูปที่



รูปที่ 4.5 การขึ้นกับเวลาการวัดสัญญาณรบกวนของพัลส์ที่เหย้าเข้าไปเพื่อเป็นตัวตรวจสอบ โดยเส้นกราฟเส้นกลาง คือ พัลส์อ้างอิง ส่วนบนและเส้นล่างเป็นของพัลส์โมดสัญญาณและโมดนิ่งเฉยตามลำดับ



รูปที่ 4.6 กราฟแสดงความสัมพันธ์ระหว่าง  $V(\Omega)$  และ  $\Omega$  ตามสมการ (233) โดยที่  $g^2 = 0.001$  ,  $\kappa = 0.03$

## บทที่ 5

### สรุปผล อภิปรายและข้อเสนอแนะ

#### 5.1 สรุปผล

ได้วิเคราะห์การแผ่ของคลื่นสถานะโพตอนในสถานะบีบอัดภายในวงแหวนสั่นพ้องแพนด้าโดยใช้กระบวนการสโตแคสติก โดยได้วิเคราะห์หาเวลาที่สถานะยังสามารถดำรงอยู่ในระหว่างการมีอันตรกิริยากับแหล่งความร้อนภายใต้สมดุลความร้อน พบว่าสถานะของโพตอนที่ได้มีความเหมาะสมจึงควรนำวงแหวนสั่นพ้องดังกล่าว ที่จะนำไปประยุกต์ใช้เพื่อผลิตเป็นชิ้นส่วนของวงจรในหน่วยประมวลผลควอนตัมคอมพิวเตอร์ได้

#### 5.2 ข้อเสนอแนะ

ในงานวิจัยครั้งต่อไปควรออกแบบแฮมิลโทเนียนของระบบที่ซับซ้อนมากกว่านี้ และการออกแบบวงแหวนสั่นพ้องแพนด้า ควรสเกลมาตราให้เล็กลงระดับของท่อนำคลื่นนาโน เพื่อประสิทธิภาพการประมวลผลที่ละเอียดแม่นยำและมีประสิทธิภาพมากขึ้น



## บรรณานุกรม

1. P.D. Drummond and Z. Ficek, *Quantum Squeezing*, Springer, Berlin, 2004.
2. Xiao, Min, Jiang, Dong, and Yang. *Coupling Whispering-Gallery-Mode Microcavities with Modal Coupling Mechanism*, 2008, IEEE Journal of Quantum Electronics, Vol. 44. Issue 11, p. 1065.
3. Ashkin, *Acceleration and Trapping of Particles by Radiation Pressure*, 1970, Phys. Rev. Lett. Vol. 24, p. 156.
4. S. Chu, J. E. Bjorkholm, A. Ashkin, and A. Cable, *Experimental Observation of Optically Trapped Atoms*, 1986, Phys. Rev. Lett. Vol. 57, p. 314.





## ประวัติผู้วิจัย

ดร.ชัชวาล ศรีภักดี สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาตรีจากวิทยาลัยครูนครราชสีมา วุฒิการศึกษา ค.บ. (ฟิสิกส์) พ.ศ. 2536 สำเร็จการศึกษาระดับปริญญาโทจากจุฬาลงกรณ์มหาวิทยาลัย วุฒิการศึกษา วท.ม. (ฟิสิกส์) พ.ศ. 2542 และสำเร็จการศึกษาระดับปริญญาเอกจากสถาบันเทคโนโลยีพระจอมเกล้าเจ้าคุณทหารลาดกระบัง วุฒิการศึกษา ปร.ด (ฟิสิกส์ประยุกต์) พ.ศ. 2550 ปัจจุบันรับราชการตำแหน่งอาจารย์ สังกัด กลุ่มวิชาฟิสิกส์ สาขาวิชาวิทยาศาสตร์ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนคร ดร.ชัชวาล ศรีภักดี มีความสนใจในหัวข้อการวิจัยทางด้านฟิสิกส์เกี่ยวกับ สารสนเทศเชิงควอนตัม ทัศนศาสตร์เชิงควอนตัม การจำลองสถานการณ์ โดยมีผลงานวิจัยได้รับการตีพิมพ์ระดับนานาชาติมากกว่า 9 เรื่อง

