

เปรียบเทียบผลเฉลยของปัญหาสติก-สลลิป โดยวิธีทำซ้ำจาโคบี และวิธีทำซ้ำเกาส์-ไซเดล

Comparing the Solution of the Stick-Slip Problem by Jacobi Iteration Method and Guass-Seidel Iteration Method

นวลักษณ์ ทองจับ^{1*}

¹อาจารย์ ภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ศูนย์รังสิต 12121

บทคัดย่อ

การวิจัยครั้งนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อเปรียบเทียบการคำนวณหาผลเฉลยของวิธีเชิงตัวเลข 2 วิธี คือ วิธีทำซ้ำจาโคบีและวิธีทำซ้ำเกาส์-ไซเดลของปัญหาสติก-สลลิปที่ทอดายของกระบวนการอัดรีด โดยใช้วิธีสมาชิกจำกัดแบบเซมิอิมพลิซิท์เทย์เลอร์-กาเลอร์คินเพรชเชอร์คอร์เรกชัน ในการพิจารณาสมการเนเวียร์-สโตกส์ เพื่อประมาณค่าความเร็วและความดัน สำหรับของไหลนิวโตเนียนในระบบพิกัดทรงกระบอก 2 มิติ และปรับปรุงผลเฉลยให้แม่นยำโดยใช้เทคนิคเกรเดียนท์รีคัฟเวอรี การวิเคราะห์ห้ดูเข้าแสดงว่าวิธีทำซ้ำเกาส์-ไซเดลห้เข้าสู่ผลเฉลยจริงดีกว่าวิธีทำซ้ำจาโคบี เนื่องจากผลเฉลยจากวิธีทำซ้ำเกาส์-ไซเดลมีจำนวนทำซ้ำน้อยกว่าวิธีทำซ้ำจาโคบี

Abstract

This object of research is to compare the computation solution of two numerical methods. The methods were Jacobi iteration method and Guass-Seidel iteration method for the stick-slip problem at die of the extrusion process. The Navier-Stokes equation was analysed by finite element method of semi implicit Taylor-Galerkin/pressure-correction scheme to approximate velocity and pressure for Newtonian fluid in two dimensional cylindrical coordinate system. Solution accuracy was improved by the gradient recovery technique. The convergence analysis revealed that Guass-Seidel method approach to exact solution was better than Jacobi iteration method, that is because Guass-Seidel iteration method had less solution than Jacobi iteration method.

คำสำคัญ : วิธีสมาชิกจำกัดแบบเซมิอิมพลิซิท์เทย์เลอร์-กาเลอร์คินเพรชเชอร์คอร์เรกชัน สติก-สลลิป
วิธีทำซ้ำจาโคบี วิธีทำซ้ำเกาส์-ไซเดล

Key words : Finite element method of semi implicit Taylor-Galerkin/pressure-correction scheme, Stick-slip, Jacobi iteration method, Guass-Seidel iteration method

1. บทนำ

ในการหาผลเฉลยโดยวิธีเชิงตัวเลข (the numerical method) ของสมการการไหลของของไหลนิวโตเนียนและของไหลวิสโคอีลาสติก ที่เรียกว่าสมการเนเวียร์-สโตกส์ (Navier-Stokes equation) มีอยู่หลายวิธี เช่น วิธีขอบเขตจำกัด (boundary element method) หรือวิธีผลต่างอันดับ (finite difference method) เป็นต้น วิธีที่นิยมและใช้กันอย่างแพร่หลาย คือ วิธีสมาชิกจำกัด (finite element method) ซึ่งเป็นการเปลี่ยนสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยให้เป็นสมการพีชคณิต เพื่อความสะดวกและง่ายต่อการหาผลเฉลย และทำการหาผลเฉลยของระบบสมการดังกล่าว โดยใช้วิธีทำซ้ำจาโคบี (Jacobi iteration method) และวิธีทำซ้ำเกาส์-ไซเดล (Guass-Seidel iteration method)

ในการศึกษาครั้งนี้ ได้นำวิธีสมาชิกจำกัดมาใช้ในการแก้ปัญหาสติก-สลิป (stick-slip problem) บริเวณท่อตาย (die) ของกระบวนการอัดรีด (the extrusion process) ในโรงงานอุตสาหกรรม และเปรียบเทียบผลเฉลยโดยวิธีทำซ้ำจาโคบีและวิธีทำซ้ำเกาส์-ไซเดล เพื่อศึกษาสมบัติต่างๆ รวมทั้งพฤติกรรมการไหลภายในท่อตาย เพื่อเป็นการนำร่องสู่ปัญหาจริงในโรงงานอุตสาหกรรม

วัตถุประสงค์ของงานวิจัย

1. เปรียบเทียบจำนวนทำซ้ำของผลเฉลยจากวิธีทำซ้ำจาโคบีกับวิธีทำซ้ำเกาส์-ไซเดล ด้วยวิธีสมาชิกจำกัดเซมิอิมพลิซิทเทย์เลอร์-กาลเลอร์คินเพรชคอร์เรคชัน (semi implicit Taylor-Galerkin pressure-correction finite element method)

2. พัฒนาโปรแกรมคอมพิวเตอร์ด้วยภาษาซี เพื่อใช้คำนวณผลเฉลยของปัญหาการไหลแบบสติก-สลิป เพื่อประมาณค่าความเร็วและค่าความดัน รวมทั้งลักษณะกายภาพและรูปร่างของของไหลนิวโตเนียน

2. วิธีการศึกษา

1. ศึกษาการไหลของปัญหาสติก-สลิป บริเวณท่อตายของของไหลนิวโตเนียน ภายใต้ข้อสมมติฐานที่ว่า ของไหลมีการไหลแบบราบเรียบ อุณหภูมิคงตัว ไม่มีผลกระทบจากแรงโน้มถ่วงของโลก ไร้อากาศ ไม่อัดตัวและไม่เหนียว ระบบพิกัดทรงกระบอก 2 มิติ จากสมการเนเวียร์-สโตกส์ด้วยวิธีสมาชิกจำกัดและวิธีกาลเลอร์คินถ่วงน้ำหนักของเสกตคัง แทนค่าจากสูตรปริพันธ์ของเกาส์-เลอจองด์ (Guass-Legendre) แบ่งการคำนวณเป็น 3 ขั้นตอน ด้วยอนุกรมเทย์เลอร์แล้วจัดให้อยู่ในระบบสมการเชิงเส้น

2. หาผลเฉลยระบบสมการเชิงเส้นจากข้อ 1 ด้วยวิธีทำซ้ำจาโคบีและวิธีทำซ้ำเกาส์-ไซเดล และปรับปรุงผลเฉลยให้แม่นยำ ด้วยเทคนิคเกรเดียนท์รีคัฟเวอรี (Gradient recovery)

3. สร้างโปรแกรมคอมพิวเตอร์ด้วยภาษาซี เปรียบเทียบการลู่เข้าของวิธีทำซ้ำจาโคบีกับวิธีทำซ้ำเกาส์-ไซเดล จากโครงข่าย 3 รูปแบบ

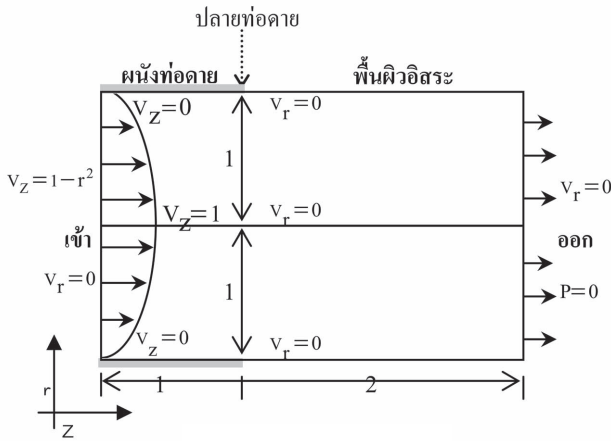
2.1 ปัญหาสติก-สลิป

คือ ปัญหาการไหลของของไหลผ่านท่อตาย ที่ไม่มีการลื่นไหล (slip) บริเวณผนังท่อตายของกระบวนการอัดรีด ตัวอย่างชิ้นงานที่ได้จากกระบวนการนี้มีหลายอย่าง เช่น ท่อพีวีซี การเคลือบสายไฟ เป็นต้น

ในการศึกษาครั้งนี้ กำหนดให้ท่อตายมีเส้นผ่านศูนย์กลางขนาด 2 หน่วย และยาวขนาด 1 หน่วย โดยมีพื้นผิวอิสระขนาด 2 หน่วย การไหลเข้าของไหลบริเวณท่อตายเป็นการไหลแบบพาราโบลา กำหนดความเร็วบริเวณทางเข้าของท่อตาย ดังสมการ (1)

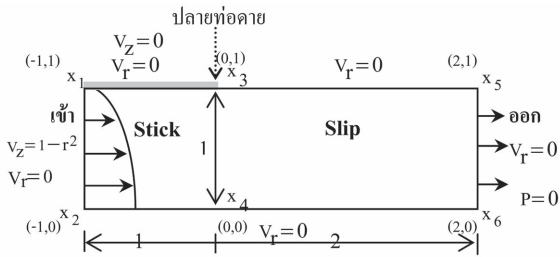
$$V_z(r) = (1-r^2) \text{ บริเวณทางเข้า} \quad (1)$$

ความเร็วของผนังของท่อตายมีค่าเป็นศูนย์ดังรูปที่ 1



รูปที่ 1 การไหลผ่านท่อ

จากรูปที่ 1 ระบายครึ่งบนและระบายครึ่งล่างของท่อตายสมมาตรกัน ดังนั้นจึงทำการพิจารณาเพียงระบายครึ่งบนของท่อตาย ดังรูปที่ 2



รูปที่ 2 การไหลผ่านระบายครึ่งบนของท่อตาย

จากรูปที่ 2 ให้ x_1, x_2, x_3, x_4 เป็นส่วนของท่อตาย และ x_3, x_4, x_5, x_6 เป็นส่วนของพื้นผิวอิสระ โดยกำหนดเงื่อนไขขอบของปัญหาสติก-สลลิป ดังนี้

บริเวณส่วนที่เป็นผนังคือ x_1, x_3 เรียกว่า สติก (stick) มีความเร็วในแนวแกน z มีค่าเป็นศูนย์และความเร็วในแนวแกน r มีค่าเป็นศูนย์

บริเวณพื้นผิวอิสระคือ x_3, x_5 เรียกว่า สลิป (slip) มีความเร็วในแนวแกน r มีค่าเป็นศูนย์

บริเวณทางเข้าของท่อตายคือ x_1, x_2 ซึ่งมีความเร็วในแนวแกน z มีค่าเท่ากับความเร็วแบบพาราโบลาดังสมการ (1) และความเร็วในแนวแกน r มีค่าเป็นศูนย์

บริเวณทางออกบริเวณพื้นผิวอิสระ คือ x_5, x_6 ความเร็วในแนวแกน r มีค่าเป็นศูนย์และความดันมีค่าเป็นศูนย์

บริเวณสมมาตรกลางท่อตาย x_2, x_6 ความเร็วในแนวแกน r มีค่าเป็นศูนย์

โดยที่ V_z แทน ความเร็วในแนวแกน z
 V_r แทน ความเร็วในแนวแกน r
 P แทน ความดัน

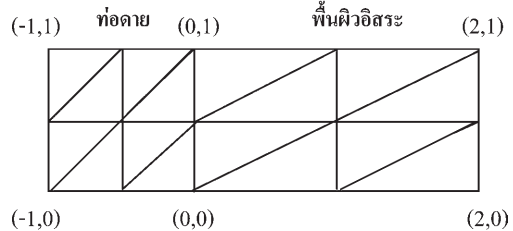
จากรูปที่ 2 ทำการแบ่งโดเมนออกเป็นโครงข่ายที่มีชั้นประกอบแบบสามเหลี่ยม 6 โหนด ดังตารางที่ 1

ตารางที่ 1 โครงข่ายชั้นประกอบรูปสามเหลี่ยม

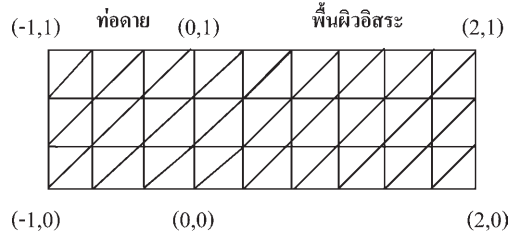
จำนวนชั้นประกอบ	จำนวนโหนด	ความกว้างที่น้อยที่สุด
16	45	1.5
36	91	0.33
64	153	0.25

จากตารางที่ 1 สามารถแสดงโครงข่ายชั้นประกอบรูปสามเหลี่ยม โดยที่จำนวนแถวและจำนวนหลักมีจำนวนเท่ากันในท่อตายกับผิวอิสระ ดังรูปที่ 3

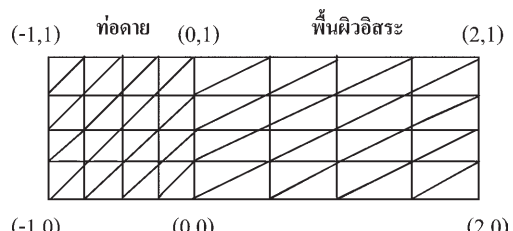
โครงข่าย 16 ชั้นประกอบ



โครงข่าย 36 ชั้นประกอบ



โครงข่าย 64 ชั้นประกอบ



รูปที่ 3 โครงข่ายชั้นประกอบรูปสามเหลี่ยม

สมการเนเวียร์-สโตกส์

คือ สมการการไหลของของไหลซึ่งเป็นสมการเชิงอนุพันธ์ย่อยไม่เชิงเส้นดังสมการ (2)

$$\rho \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} = \mu \nabla^2 \mathbf{U} - \rho \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} - \nabla P \quad (2)$$

โดยที่ μ แทน ความหนืด
 \mathbf{U} แทน ความเร็ว
 ρ แทน ความหนาแน่น
 P แทน ความดัน
 t แทน เวลา

แปลงสมการ (2) ให้อยู่ในระบบสมการไร้หน่วยจะได้สมการเชิงอนุพันธ์ย่อย ดังสมการ (3) และ (4)

$$\text{Re} \mathbf{U}_t = \nabla \cdot \mu \tilde{\mathbf{D}} - \text{Re} \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} - \nabla P \quad (3)$$

และ $\tilde{\mathbf{D}} = \nabla \mathbf{U} + \nabla \mathbf{U}^T \quad (4)$

โดยที่ Re แทน ตัวเลขเรย์โนลด์

2.2 วิธีสมาชิกจำกัด

คือ วิธีการเปลี่ยนสมการเชิงอนุพันธ์สามัญหรืออนุพันธ์ย่อยให้เป็นสมการพีชคณิต ภายใต้โดเมน (domain) จำกัด ที่มีเงื่อนไขเริ่มต้นอย่างเหมาะสม

ขั้นตอนของวิธีสมาชิกจำกัด

1. แบ่งโดเมน (พื้นที่ที่กำหนด) ออกเป็นโครงข่ายชั้นประกอบ (element) แบบสามเหลี่ยม 6 โหนด (node) ที่มี m ชั้นประกอบ และจำนวนโหนด n จุด ในการแบ่งเป็นโดเมนย่อยมีเงื่อนไข คือ จำนวนของโดเมนย่อย (Ω_e) มีจำนวนจำกัด ($i=1,2,3,\dots,n$) และพื้นที่ทั้งหมดคือโดเมนที่มีขอบเขตจำกัดทั้งหมด (Ω)

นั่นคือ
$$\Omega = \sum_{e=1}^m \Omega_e$$

โดยที่ m แทน จำนวนชั้นประกอบทั้งหมด
 n แทน จำนวนโหนดทั้งหมด
 e แทน จำนวนชั้นประกอบ
 i แทน จำนวนโดเมนย่อย

แทนฟังก์ชันประมาณรูปร่าง (interpolation shape function) ดังนี้

ความเร็ว ($\tilde{U}(x)$) คือ
$$\tilde{U}(x) = \sum_{i=1}^n N_{\phi}^i(x) U^i$$

ความดัน ($\tilde{P}(x)$) คือ
$$\tilde{P}(x) = \sum_{i=1}^n N_{\psi}^i(x) P^i$$

โดยที่ $N_{\phi}^i(x)$ แทน ฟังก์ชันประมาณรูปร่างของความเร็ว
 $N_{\psi}^i(x)$ แทน ฟังก์ชันประมาณรูปร่างของความดัน
 U^i แทน ความเร็วที่แต่ละโหนด
 P^i แทน ความดันที่แต่ละโหนด

ฟังก์ชันประมาณรูปร่างเชิงเส้นของความดัน (ψ) ประมาณจากค่า 3 ค่า ดังนี้

$$N_1^{\psi}(\xi, \eta) = 1 - \xi - \eta$$

$$N_2^{\psi}(\xi, \eta) = \xi$$

$$N_3^{\psi}(\xi, \eta) = \eta$$

ส่วนความเร็วใช้ฟังก์ชันประมาณรูปร่างพหุนามกำลังสอง (ϕ) ที่ประมาณจากค่า 6 ค่า ดังนี้

$$N_1^{\phi}(\xi, \eta) = (1 - \xi - \eta)(1 - 2\xi - 2\eta)$$

$$N_2^{\phi}(\xi, \eta) = \xi(2\xi - 1)$$

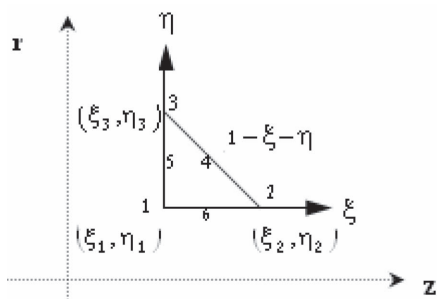
$$N_3^{\phi}(\xi, \eta) = \eta(2\eta - 1)$$

$$N_4^{\phi}(\xi, \eta) = 4\xi(1 - \xi - \eta)$$

$$N_5^{\phi}(\xi, \eta) = 4\xi\eta$$

$$N_6^{\phi}(\xi, \eta) = 4\eta(1 - \xi - \eta)$$

การแปลงระบบพิกัดทรงกระบอก (r,z) เป็นระบบพิกัด (ξ, η) ที่ใช้ฟังก์ชันประมาณรูปร่างดังรูปที่ 4



รูปที่ 4 ชั้นประกอบสามเหลี่ยม 6 โหนดที่ใช้ฟังก์ชันประมาณรูปร่างเชิงเส้น

2. ใช้วิธีการเลอร์คินถ่วงน้ำหนักของเศษตกค้าง เพื่อลดค่าผิดพลาดจากการประมาณค่า

2.3 วิธีการเลอร์คินถ่วงน้ำหนักของเศษตกค้าง

ทำการคูณสมการเศษตกค้าง ด้วยฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก ทำการปริพันธ์ตลอดทั้งโดเมน กำหนดนิพจน์ทางขวาของสมการเป็นศูนย์ ดังสมการ (5)

$$\sum_{e=1}^m \int_{\Omega_e} W(x) R(u) d\Omega = 0 \tag{5}$$

โดยที่ R(u) แทน สมการเศษตกค้าง
W(x) แทน ฟังก์ชันถ่วงน้ำหนัก

กฎลูกโซ่ของอนุพันธ์ย่อยในความดัน คือ

$$\begin{aligned} \frac{\partial p}{\partial \xi} &= \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial p}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial \xi} \\ \frac{\partial p}{\partial \eta} &= \frac{\partial p}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial \eta} + \frac{\partial p}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial \eta} \end{aligned} \tag{6}$$

จากสมการ (6) จัดให้อยู่ในรูปเมทริกซ์จะได้

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial \xi} \\ \frac{\partial p}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial r}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial r}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial z} \\ \frac{\partial p}{\partial r} \end{bmatrix} \tag{7}$$

ให้จาโคเบียนเมทริกซ์ (J) คือ

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial \xi} & \frac{\partial r}{\partial \xi} \\ \frac{\partial z}{\partial \eta} & \frac{\partial r}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{8}$$

ดังนั้น จะได้ว่า

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial \xi} \\ \frac{\partial p}{\partial \eta} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \frac{\partial p}{\partial z} \\ \frac{\partial p}{\partial r} \end{bmatrix} \tag{9}$$

เปลี่ยนอนุพันธ์ย่อยในระบบพิกัดทรงกระบอก (r,z) เป็นระบบพิกัด (xi,eta) ดังสมการ (10)

$$dzdr = \det(J) d\xi d\eta \tag{10}$$

ดังนั้นปริพันธ์ในระบบพิกัดทรงกระบอก คือ

$$\int_{\Omega} f(r,z) d\Omega = \int_{\Omega^*} f(\xi,\eta) \det(J) d\Omega^* \tag{11}$$

โดยให้ f(r,z) แทน ฟังก์ชันในระบบพิกัดทรงกระบอก
f(xi,eta) แทน ฟังก์ชันในระบบพิกัด (xi,eta)
Omega* แทน โดเมนจำกัดในระบบพิกัด (xi,eta)

2.4 สูตรปริพันธ์ของเกาส์-เลอจองด์

ใช้ในการประมาณค่าปริพันธ์สองชั้นของฟังก์ชัน f(xi,eta) ดังสมการ (12)

$$\int_0^1 \int_0^{1-\eta} f(\xi,\eta) d\xi d\eta \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j f(\xi_i, \eta_j) \tag{12}$$

ตารางที่ 2 แสดงค่าประมาณปริพันธ์ของเกาส์-เลอจองด์ ใน 2 มิติ แบบถ่วงน้ำหนัก

4 จุด

i	(ξ_i, η_i)	w_i
1	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	$\frac{27}{96}$
2	$(\frac{1}{5}, \frac{1}{5})$	$\frac{25}{96}$
3	$(\frac{3}{5}, \frac{1}{5})$	$\frac{25}{96}$
4	$(\frac{1}{5}, \frac{3}{5})$	$\frac{25}{96}$

ในงานวิจัยใช้จุดเกาส์และค่าถ่วงน้ำหนักแบบ 4 จุด เพื่อประมาณค่าปริพันธ์ในสมการ (12) และจัดระบบสมการเชิงเส้นให้อยู่รูปของเมทริกซ์ดังสมการ (13)

$$Ax = b \tag{13}$$

โดยที่ A แทน เมทริกซ์สัมประสิทธิ์
 x แทน เวกเตอร์ผลเฉลย
 b แทน เวกเตอร์ค่าคงที่ด้านขวามือ

2.5 เทคนิคเซมิอิมพลีซิทีแวลอร์-กาลเลอร์กิน-เพรชเชอร์คอร์เรชัน

ใช้อุปกรณ์เทย์เลอร์กระจายช่วงเวลา (time step) เป็นความสัมพันธ์เวียนเกิด (recurrence relation) ในการคำนวณความเร็ว โดยใช้วิธีเครงก์-นิโคลสัน (Crank-Nicolson) ทำการแบ่งการคำนวณค่าความเร็วในแนวแกน z และ r ออกเป็น 2 ขั้นตอน เพื่อให้ได้ค่าที่แม่นยำและลู่เข้า เพื่อที่จะนำไปคำนวณหาค่าความดันต่อไป หลังจากนั้นคำนวณค่าความเร็วในแนวแกน z และ r อีกครั้ง ซึ่งอาศัยวิธีสมาชิกจำกัดที่ใช้หลักการกาลเลอร์กิน ในการพิจารณาสมการเนเวียร์-สโตกส์ที่ได้กล่าวมาแล้วในสมการ (3) และ (4) ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 การคำนวณค่าความเร็วในแนวแกน z และ r แบ่งออกเป็นการคำนวณในเวลาเริ่มต้น T ใน สมการ (14) เพื่อคำนวณหาค่าที่เวลา

$T + \frac{1}{2}$ และใช้ค่าที่เวลา $T + \frac{1}{2}$ เพื่อคำนวณหาค่าที่เวลา * ในสมการ (15)

$$\frac{2Re}{\Delta t}(U^{T+\frac{1}{2}} - U^T) = [\nabla \cdot (2\mu\tilde{D}) - ReU \cdot \nabla U - \nabla P]^T + \frac{1}{2} \nabla \cdot \mu (\tilde{D}^{T+\frac{1}{2}} - \tilde{D}^T) \tag{14}$$

$$\frac{Re}{\Delta t}(U^* - U^T) = [\nabla \cdot (\mu\tilde{D}) - \nabla P]^T - [ReU \cdot \nabla U]^T + \frac{1}{2} \nabla \cdot \mu (\tilde{D}^* - \tilde{D}^T) \tag{15}$$

ขั้นตอนที่ 2 การคำนวณค่าความดันโดยนำค่าที่ได้จากการคำนวณขั้นตอนที่ 1 ในสมการ (16)

$$\nabla^2 (P^{T+1} - P^T) = \frac{2Re}{\Delta t} \nabla U^* \tag{16}$$

ขั้นตอนที่ 3 การคำนวณค่าความเร็วในแนวแกน z และ r ที่เวลาเต็มขั้น $T + 1$ จากค่าที่ได้จากการคำนวณในขั้นตอนที่ 1 และ 2 ในสมการ (17)

$$\frac{2Re}{\Delta t}(U^{T+1} - U^*) = -(P^{T+1} - P^T) \tag{17}$$

สามารถเขียนอยู่ในรูปเมทริกซ์ ดังนี้

ขั้นตอนที่ 1 จากสมการ (14) และ (15) สามารถจัดให้อยู่ในสมการ (18) และ (19) ตามลำดับ

$$\left[\frac{2Re}{\Delta t} M + \frac{1}{2} \mu S \right] (U^{T+\frac{1}{2}} - U^T) \tag{18}$$

$$= \{ -[\mu S + Re N(U)] U \}^T + L^T P^T$$

$$\left[\frac{Re}{\Delta t} M + \frac{1}{2} \mu S \right] (U^* - U^T) \tag{19}$$

$$= L^T P^T - \mu S^T - [Re N(U) U]^{T+\frac{1}{2}}$$

ขั้นตอนที่ 2 จากสมการ (16) สามารถจัดให้อยู่ในสมการ (20)

$$\frac{\Delta t}{2Re} K(P^{T+1} - P^T) = -LU^* \quad (20)$$

ขั้นตอนที่ 3 จากสมการ (17) สามารถจัดให้อยู่ในสมการ (21)

$$\frac{2Re}{\Delta t} M(U^{T+1} - U^*) = L^t(P^{T+1} - P^T) \quad (21)$$

$$\text{โดยที่ } M_{ij} = \int_{\Omega} \phi_i \phi_j d\Omega$$

$$N(U)_{ij} = \int_{\Omega} \phi_i \phi_k U_k \nabla \phi_j d\Omega$$

$$K_{mn} = \int_{\Omega} \nabla \psi_m \nabla \psi_n d\Omega$$

$$L = (L_1, L_2)$$

$$(L_1)_{in} = \int_{\Omega} \psi_n \frac{\partial \phi_i}{\partial r} d\Omega$$

$$(L_2)_{in} = \int_{\Omega} \psi_n \frac{\partial \phi_i}{\partial z} d\Omega$$

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{12}^t & S_{22} \end{bmatrix}$$

$$(S_{11}) = \int_{\Omega} \left\{ 2 \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \frac{\partial \phi_j}{\partial r} + \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} + \frac{\phi_i \phi_j}{r^2} \right\} d\Omega$$

$$(S_{12}) = \int_{\Omega} \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} d\Omega$$

$$(S_{22}) = \int_{\Omega} \left\{ \frac{\partial \phi_i}{\partial r} \frac{\partial \phi_j}{\partial r} + 2 \frac{\partial \phi_i}{\partial z} \frac{\partial \phi_j}{\partial z} \right\} d\Omega$$

$$B = \begin{bmatrix} B_1 - B_3 & B_2 & 0 & B_3 \\ 0 & B_1 & B_2 & 0 \end{bmatrix}$$

$$(B_1)_{ij} = \int_{\Omega} \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial r} d\Omega$$

$$(B_2)_{ij} = \int_{\Omega} \phi_i \frac{\partial \phi_j}{\partial z} d\Omega$$

$$(B_3)_{ij} = \int_{\Omega} \frac{\phi_i \phi_j}{r} d\Omega$$

$$d\Omega = r dr dz$$

$$i, j, k = 1, 2, 3$$

$$m, n = 1, 2$$

โดยทั้ง 3 ขั้นตอน ใช้วิธีทำซ้ำจาโคบีและวิธีทำซ้ำเกาส์-ไซเดลในการหาผลเฉลยทุกขั้นตอน

2.6 การแก้ปัญหาระบบสมการเชิงเส้น

การหาผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้นสามารถทำได้หลายวิธี ขึ้นอยู่กับระบบสมการเชิงเส้น สำหรับปัญหานี้ทำการแบ่งโดเมนออกเป็นชั้นประกอบย่อยจำนวนมากซึ่งทำให้มีจำนวนโนดมากมาย ดังนั้นการใช้วิธีโดยตรง เช่น การกำจัดแบบเกาส์เซียน (Guassian eliminaton) จึงไม่นิยมเนื่องจากไม่สะดวกในการคำนวณ และใช้เวลาในการคำนวณนาน เพราะระบบสมการมีขนาดใหญ่ ดังนั้นเพื่อหลีกเลี่ยงปัญหาที่เกิดขึ้น จึงนำวิธีทำซ้ำจาโคบีและวิธีทำซ้ำเกาส์-ไซเดล มาใช้ในการคำนวณค่าประมาณของผลเฉลย เพราะสะดวกต่อการเขียนโปรแกรมในการคำนวณ

2.6.1 วิธีทำซ้ำจาโคบี

คือการประมาณผลเฉลยของระบบสมการเชิงเส้น $Ax = b$ เป็นระบบสมการ $x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c$ โดยกำหนดค่าเวกเตอร์ผลเฉลยเริ่มต้น $(x^{(0)})$ ที่เหมาะสม

$$\text{ให้ } A = D - C \quad (22)$$

จากสมการ (22) จะได้ว่า

$$Dx = Cx + b \quad (23)$$

$$x = D^{-1} Cx + D^{-1} b \quad (24)$$

$$\text{ให้ } B = D^{-1} C \text{ และ } c = D^{-1} b$$

จะได้สมการทำซ้ำดังสมการ (25)

$$x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c, \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (25)$$

โดยที่ D แทน เมทริกซ์ทแยงมุมที่มีสมาชิกในแนวทแยงมุมทุกสมาชิกของ A ที่มีค่าไม่เป็นศูนย์

C แทน เมทริกซ์นอกแนวทแยงมุมทุกสมาชิกของ A

k แทน จำนวนทำซ้ำ

$x^{(k+1)}$ แทน เวกเตอร์ผลเฉลยที่จำนวนทำซ้ำ $k+1$
 $x^{(k)}$ แทน เวกเตอร์ผลเฉลยที่จำนวนทำซ้ำ k

จากสมการ (25) สามารถเขียนเป็นสูตรการคำนวณได้ ดังสมการ (26)

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} [b_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n a_{ij} x_j^{(k)}], \quad i=1,2,3,K,n \quad (26)$$

โดยที่ i แทน สมาชิกแถวของเมทริกซ์ A
 j แทน สมาชิกหลักของเมทริกซ์ A
 a_{ii} แทนสมาชิกของเมทริกซ์ A แถวที่ i หลักที่ i
 a_{ij} แทน สมาชิกของเมทริกซ์ A แถวที่ i หลักที่ j
 b_i แทน ค่าคงที่ด้านขวามือ แถวที่ i

2.6.2 วิธีทำซ้ำเกาส์-ไซเดล

ใช้หลักการทำซ้ำเช่นเดียวกับวิธีทำซ้ำจาโคบี แต่ผลเฉลยที่ได้ในแถวก่อนหน้า จะนำไปแทนค่าในการคำนวณแถวต่อไป ดังนั้นจากสมการ (26) จะได้ว่า

$$x_i^{(k+1)} = \frac{1}{a_{ii}} [b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)}]$$

และ $i=1,2,3,K,n$ (27)

2.7 ค่าผิดพลาด

กำหนดการลู่เข้าของผลเฉลยด้วยค่าผิดพลาดของผลเฉลยจากการคำนวณโดยวิธีทำซ้ำจาโคบี และวิธีทำซ้ำเกาส์-ไซเดล ให้มีค่าผิดพลาดน้อยกว่า 0.00001 ดังสมการ (28)

$$E(x) = \max\{ |x^{(k+1)} - x^{(k)}| \} < 0.00001 \quad (28)$$

โดยที่ $E(x)$ แทน ค่าผิดพลาดของผลเฉลย

2.8 เทคนิคเกรเดียนท์รีคัพเวอรี

เป็นการเฉลี่ยค่าความเร็วของแต่ละชั้นประกอบที่ใช้ในโดร่วมกันให้มีเพียงค่าเดียว เนื่องจากในชั้นประกอบ 2 ชั้นประกอบที่ติดกันจะมีโนดบางโนดร่วมกัน ทำให้ผลเฉลยในโนดนั้นมีค่าแตกต่างกัน โดยการปรับค่าของผลเฉลย ให้ราบเรียบและแม่นยำ

โดยใช้เทคนิคเกรเดียนท์รีคัพเวอรี ซึ่งเป็นวิธีได้รับการยอมรับ สามารถคำนวณเกรเดียนท์ความเร็วในแต่ละชั้นประกอบ ดังสมการ (29)

$$G_1^c(x,t) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \phi(x)}{\partial x_1} U_j(t), \quad i=1,2 \quad (29)$$

โดยที่ $G_1^c(x,t)$ แทน เกรเดียนท์ความเร็วในแต่ละชั้นประกอบ

3. ผลการศึกษาและอภิปรายผล

จากการคำนวณผลเฉลยของปัญหาสถิต-สถิตย์ด้วยโปรแกรมคอมพิวเตอร์ แสดงจำนวนทำซ้ำของวิธีทำซ้ำจาโคบีและวิธีทำซ้ำเกาส์-ไซเดลที่มีค่าผิดพลาด 0.00001 ดังตารางที่ 3 และ 4

ตารางที่ 3 แสดงจำนวนทำซ้ำในการคำนวณของวิธีทำซ้ำจาโคบี

จำนวนชั้นประกอบ	จำนวนทำซ้ำในการคำนวณ (ครั้ง)		
	Vz	Vr	P
16	1.87×10^7	1.41×10^6	1.81×10^7
36	1.33×10^8	1.01×10^7	2.32×10^7
64	5.47×10^8	4.53×10^7	1.62×10^8

ตารางที่ 4 แสดงจำนวนทำซ้ำในการคำนวณของวิธีทำซ้ำเกาส์-ไซเดล

จำนวนชั้นประกอบ	จำนวนทำซ้ำในการคำนวณ (ครั้ง)		
	Vz	Vr	P
16	1.57×10^7	1.35×10^6	1.81×10^7
36	1.18×10^8	9.46×10^6	1.22×10^7
64	5.08×10^8	4.06×10^7	8.67×10^7

จากตารางที่ 3 และ 4 พบว่าเมื่อเปรียบเทียบจำนวนทำซ้ำจากการคำนวณความเร็วในแนวแกน z ความเร็วในแนวแกน r และความดัน วิธีทำซ้ำเกาส์-ไซเดลมีจำนวนทำซ้ำจากการคำนวณน้อย

กว่าวิธีทำซ้ำจาโคบี นั่นคือ วิธีทำซ้ำเกาส์-ไซเดลมีการลู่เข้าของผลเฉลยเร็วกว่าวิธีทำซ้ำจาโคบี เนื่องจากเมื่อหาผลเฉลยในแต่ละครั้ง จะนำผลเฉลยที่ได้ในครั้งนั้นไปแทนค่าในการคำนวณครั้งต่อไป ทำให้ลดจำนวนทำซ้ำที่เกิดขึ้นในวิธีทำซ้ำจาโคบีลดน้อยลง

เนื่องจากผลเฉลยที่คำนวณได้จากวิธีทำซ้ำจาโคบีและวิธีทำซ้ำเกาส์-ไซเดลที่มีค่าผิดพลาด 0.00001 ให้ผลเฉลยของความเร็วในแนวแกน z ความเร็วในแนวแกน r และความดันมีค่าใกล้เคียงกันทุกโครงข่าย จึงแสดงผลเฉลยจากการคำนวณของวิธีทำซ้ำเกาส์-ไซเดล ดังตารางที่ 5

ตารางที่ 5 แสดงผลเฉลยของวิธีทำซ้ำเกาส์-ไซเดล

จำนวนชั้นประกอบ	ผลเฉลยจากการคำนวณ		
	V_z m	V_r m	Pm
16	0.538	0.078	5.179
36	0.526	0.084	5.152
64	0.483	0.091	4.982

โดยที่ V_z m แทน ความเร็วในแนวแกน z บริเวณทางออกพื้นผิวอิสระ

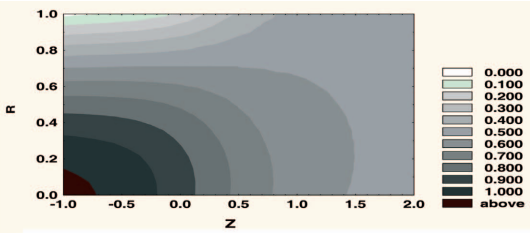
V_r m แทน ความเร็วในแนวแกน r ที่มีค่ามากที่สุด

Pm แทน ความแตกต่างของความดันระหว่างทางเข้าและทางออกของท่อตาย

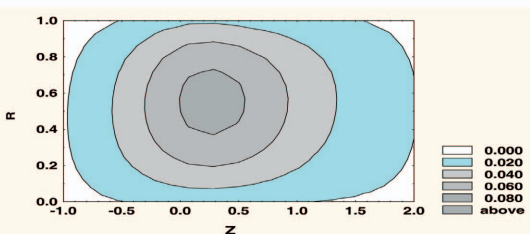
จากตารางที่ 5 พบว่าผลเฉลยที่ได้จากการคำนวณด้วยวิธีทำซ้ำจาโคบีและวิธีทำซ้ำเกาส์ไซเดลในโครงข่ายที่มีความละเอียดมาก จะให้ผลเฉลยที่ดีกว่าโครงข่ายที่มีความละเอียดน้อย นั่นคือโครงข่ายที่มีชั้นประกอบทั้งหมด 64 ชั้นประกอบและจำนวนโนด 153 โนด ดังรูปที่ 3 ให้ค่าผลเฉลยที่ดีที่สุด เนื่องจากมีค่าใกล้เคียงกับผลเฉลยที่ได้มีการศึกษาในปัญหาสถิต-สถิต ก่อนหน้าของ Ngamaram-varanggul และ Webster [5] ที่มีความเร็วในแนว

แกน z บริเวณพื้นผิวอิสระคือ 0.5 ความเร็วในแนวแกน r ที่มีค่ามากที่สุดคือ 0.1 และความแตกต่างของความดันระหว่างทางเข้าและทางออกของท่อตายคือ 4.88

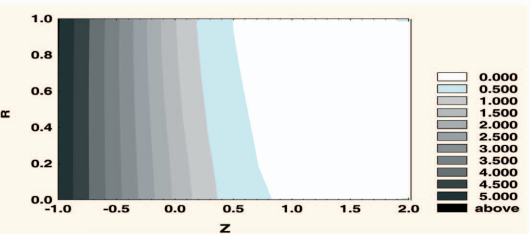
ดังนั้นผลเฉลยจากการคำนวณของโครงข่ายรูปสามเหลี่ยม 64 ชั้นประกอบ สามารถแสดงระดับผลเฉลยด้วยสี ดังรูปที่ 5, 6 และ 7



รูปที่ 5 แสดงผลเฉลยด้วยสีของความเร็วในแนวแกน Z



รูปที่ 6 แสดงผลเฉลยด้วยสีของความเร็วในแนวแกน r



รูปที่ 7 แสดงผลเฉลยด้วยสีของความดัน

จากรูปที่ 5 พบว่าระดับสีของความเร็วในแนวแกน z ในท่อตาย มีการไล่ระดับสีจากระดับอ่อนไประดับเข้มแสดงความสัมพันธ์เป็นรูปโค้งพาราโบลา นั่นคือความเร็วซึ่งเป็นศูนย์ที่ผนังท่อตายจะค่อยๆ เพิ่มขึ้นจนสูงสุดบริเวณกลางท่อตาย และยังคงการไหลแบบพาราโบลาต่อไป เมื่อของไหลนิวโตเนียนไหลออกจากท่อตายอย่างอิสระ พบว่า ณ บริเวณหนึ่งจะให้ระดับสีเดียวกัน นั่นคือความเร็วจะ

มีการปรับรูปร่างการไหลแบบพาราโบลา เป็นการไหลแบบเส้นตรงจนมีค่าความเร็วเท่ากัน

จากรูปที่ 6 ระดับสีของความเร็วในแนวแกน r มีระดับสีต่ำมาก เนื่องจากความเร็วในแนวแกน r ไม่มีผลต่อการไหลของของไหล ยกเว้นบริเวณปลายท่อตาย จะมีค่าสูงกว่าบริเวณอื่นๆ เล็กน้อย

จากรูปที่ 7 ระดับสีของความดัน ที่ค่า z ที่เท่ากันจะมีระดับสีเดียวกัน โดยจะมีระดับสีเข้มสุดที่บริเวณทางเข้าของท่อตายและระดับสีจะลดลงเรื่อยๆ เมื่อค่า z มีค่าเพิ่มขึ้นจนมีค่าเป็นศูนย์ เนื่องจากมีการสูญเสียพลังงานจากแรงเฉือนที่ผนังท่อตาย ทำให้มีค่าความดันลดลงเรื่อยๆ จนเป็นศูนย์ที่นอกท่อตาย

4. สรุป

จากการคำนวณหาผลเฉลย พบว่า วิธีทำซ้ำเกาส์-ไซเดลมีจำนวนทำซ้ำในการคำนวณน้อยกว่าวิธีทำซ้ำจาโคบี นั่นคือ วิธีทำซ้ำเกาส์-ไซเดลมีการลู่เข้าของผลเฉลยเร็วกว่าวิธีทำซ้ำจาโคบี และโครงข่ายชั้นประกอบรูปสามเหลี่ยมที่มีความละเอียดสูงจะให้ค่าผลเฉลยใกล้เคียงผลเฉลยจริงมากกว่าโครงข่ายที่มีความละเอียดต่ำ แต่มีผลเสียคือจำนวนทำซ้ำจะมีจำนวนมากขึ้นเมื่อโครงข่ายมีความละเอียดมากขึ้น

ในการศึกษาลักษณะทางกายภาพปัญหาสติค-สลิป ของของไหลนิวโตเนียน พบว่าความเร็วภายในแนวยาวของท่อมีความสัมพันธ์แบบพาราโบลา เนื่องจากของไหลไหลเข้ามาแบบพาราโบลา แต่เมื่อของไหลผ่านบริเวณผิวอิสระ ของไหลจะปรับความเร็วจนมีความเร็วคงที่และมีค่าเท่ากัน ส่วนความเร็วในแนวรัศมีมีค่าน้อยมากจนเกือบเป็นศูนย์ ส่วนความดันที่บริเวณเดียวกันจะมีค่าเท่ากันและลดลงเรื่อยๆ จนเป็นศูนย์ในที่สุด เพราะมีการสูญเสียพลังงานจากแรงเฉือนที่ผนังท่อ

5. กิตติกรรมประกาศ

ขอขอบพระคุณภาควิชาคณิตศาสตร์และสถิติ คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยธรรมศาสตร์ ที่ให้การสนับสนุนการทำวิจัยครั้งนี้

6. เอกสารอ้างอิง

- H. Matallah, P. Townsend, and M.F. Webster. 1998. **Recovery and Stress-splitting Schemes for Viscoelastic Flows.** J. Non-Newtonian Fluid Mech. 75:139-166.
- J.N. Reddy and D.K. Gartling. 2001. **The Finite Element Method in Heat Transfer and Fluid Dynamics.** CRC Press LLC.
- M.J. Crochet, A.R. Davies, and K. Walters. 1984. **Numerical Simulation of Non-Newtonian Fluid Flow: Rheology Series 1.** Elsevier Science Publishers.
- S. Richardson. 1970. **A Stick-slip Problem Related to the Motion of a Free Jet at Low Reynolds Numbers.** Proc. Camb. Phil. Soc. 67:477-489.
- V. Ngamaramvaranggul and M.F. Webster. 2001. **Viscoelastic Simulation of Stick-slip and Die-swell Flows.** Int. J. Num. Meth. Fluids, 36:539-595.