การเรียนรู้เพื่อที่จะคิดอย่างคณิตศาสตร์ในศตวรรษที่ 21: พัฒนาการแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรี

ณิศรา สุทธิสังข์
ภาคิณ อังศุณิศ

งานวิจัยได้รับทุนสนับสนุนจากงบประมาณเงินรายได้ ประจำปีงบประมาณ พ.ศ. 2562
คณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนคร

Learning to Think Mathematically in the 21st Century: The Development of Student's Mathematical Ideas

Nisara Suthisung
Phakin Angsunit

This Research in Funded by Faculty of Science and Technology
Rajamangala University of Technology Phra Nakhon Year 2019

ชื่อเรื่อง การเรียนรู้เพื่อที่จะคิดอย่างคณิตศาสตร์ในศตวรรษที่ 21: พัฒนาการแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรี

ผู้วิจัย นางณิศรา สุทธิสังข์ ผศ.ภาคิณ อังศุณิศ
ปีที่ทำวิจัย พ.ศ. 2562

บทคัดย่อ

พัฒนาการแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรี ที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชาแคลคูลัส 1 มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนครใน จำนวน 1 ห้องเรียน ใช้วิธีการวิจัยเชิงคุณภาพโดยการวิเคราะห์แนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาตามกรอบแนวคิดเชิงทฤษฎี(Tall, 2004; Becker & Shimada, 1997; Isoda & Katakiri, 2012) ร่วมกับการสัมภาษณ์นักศึกษาและผลงานนักศึกษา โดยใช้สถานการณ์ปัญหา 2 สถานการณ์ปัญหา ผลการวิจัยพบว่า นักศึกษาใช้พัฒนาการแนวคิดทางคณิตศาสตร์จากวิธีการแก้ปัญหาที่ได้ลงมือปฏิบัติไปสู่วิธีการคิดทางคณิตศาสตร์ที่มีความสลับซับซ้อน และเชื่อมโยงวิธีการคิดต่างๆ อาศัยวิธีการแก้ปัญหาด้วยวิธีการเดียวไปสู่วิธีการที่หลากหลาย นักศึกษาขยายแนวคิดพื้นฐานไปสู่แนวคิดที่สูงขึ้น โดยการต่อยอดจากแนวคิดหรือวิธีการที่มีมาก่อนหน้านี้ ในการอธิบายหรือลงมือกระทำเพื่อให้ได้มาซึ่งหลักการ กฎ สูตร เกี่ยวกับคณิตศาสตร์

คำสำคัญ : พัฒนาการคิดทางคณิตศาสตร์/ การเรียนรู้เพื่อที่จะคิดอย่างคณิตศาสตร์

Title	Learning to Think Mathematically in the 21st Century: The Development of Student's Mathematical Ideas
Researcher	Mrs. Nisara Suthisung
Year	2019

Abstract

The development of students' mathematical ideas of undergraduate students Enrolled in the Calculus 1 course at Rajamangala University of Technology Phra Nakhon in the amount of 1 classroom. The research methodology uses qualitative research method by mathematical analysis of students in the theoretical framework (Tall, 2004; Becker & Shimada, 1997; Isoda & Katakiri, 2012). And it used student interviews and student work in situation 2 problems situation. The research found that Students use the development of mathematical ideas from problem solving procedures that have been implemented into complex mathematical thinking procedures. And using of linking multi-procedure thinking, relying on a procedure to multi-procedure. Students expand their elementary ideas into advanced ideas. By extending from the previous ideas or procedures of development or taking interaction with object to obtain the principles of mathematical formula.

Keywords: The development mathematical idea/Learning to think mathematically

กิตติกรรมประกาศ

ผู้วิจัยจากงานวิจัย เรื่อง การเรียนรู้เพื่อที่จะคิดอย่างคณิตศาสตร์ในศตวรรษที่ 21: พัฒนาการแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรี ขอขอบพระคุณอธิการบดีมหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนครและคณบดีคณะวิทยาศาสตร์และเทคโนโลยี ที่ให้การสนับสนุนทุนวิจัยและอำนวยความสะดวกในการดำเนินการวิจัยในครั้งนี้ให้สำเร็จลุล่วงไปด้วยดี นอกจากนั้นขอขอบพระคุณเจ้าหน้าที่งานวิจัยและพัฒนา ผู้ประสานงานวิจัยและหัวหน้างานการเงิน ที่ให้คำแนะนำในขั้นตอนการดำเนินการรายงานความก้าวหน้าในการทำวิจัยและการเบิกจ่ายงบประมาณของการทำวิจัย

ท้ายนี้ผู้วิจัยขอกราบขอบพระคุณบิดา มารดา พี่น้อง พ้องเพื่อน และครูอาจารย์ ของผู้วิจัยทุกท่าน ที่คอยให้กำลังใจ ให้ความช่วยเหลือและสนับสนุนจนกระทั่งงานวิจัยฉบับนี้สำเร็จลุล่วงได้ด้วยดี

ณิศรา สุทธิสังข์
ภาคิณ อังศุณิศ

สารบัญ

เรื่อง	หน้า
บทที่ 1 ความสำคัญและที่มา	1
1. บทนำ	1
2. วัตถุประสงค์ของการวิจัย	1
3. ขอบเขตของการวิจัย	2
4. นิยามศัพท์เฉพาะ	2
บทที่ 2 เอกสารและวรรณกรรมที่เกี่ยวข้อง	3
1. แนวคิดทางคณิตศาสตร์	3
2. พัฒนาการแนวคิดทางคณิตศาสตร์	3
3. การเรียนรู้เพื่อที่จะคิดอย่างคณิตศาสตร์	4
4. กรอบแนวคิดเชิงทฤษฎีที่นำมาวิเคราะห์	5
บทที่ 3 วิธีการดำเนินการวิจัย	6
1. กลุ่มเป้าหมาย	6
2. เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย	6
3. วิธีการดำเนินการวิจัย	6
4. การวิเคราะห์	6
5. วิธีการเพื่อให้ได้มาซึ่งข้อมูล	6
6. แผนผังการเก็บข้อมูลภาคสนาม	7
บทที่ 4 การวิเคราะห์ผลและการอภิปรายผล	8
1. การวิเคราะห์ผล	8
2. การสรุปผลการวิเคราะห์	16
3. การอภิปรายผลการวิจัย	17
4. การสะท้อนผลการวิจัย	17
บทที่ 5 การสรุปผลการวิจัย	18
บรรณานุกรม	22

บทที่ 1
ความสำคัญและที่มา

1. บทนำ

การจัดการเรียนการสอนของชั้นเรียนในประเทศไทยอาศัยบทบาทของผู้สอนเป็นผู้บรรยาย ผู้บอก ผู้สาธิตเกี่ยวกับเนื้อหาคณิตศาสตร์อันก่อให้เกิดการเรียนรู้ของผู้เรียนที่ได้มาในลำดับสุดท้าย และเนื่องจากการจัดการเรียนการสอนในชั้นเรียนยังคงเป็นแบบบรรยายเนื้อหาที่ครูพยายามนำเนื้อหาที่อยู่นอกตัวผู้เรียนเข้าไปในตัวผู้เรียนเพื่อก่อให้เกิดการเรียนรู้ของผู้เรียน ไม่ได้เน้นให้ผู้เรียนได้แสวงหาความรู้ได้ด้วยตนเอง กระบวนการเรียนรู้ผู้เรียนมีหน้าที่รับและปรับตัว ให้สอดคล้องกับเนื้อหาความรู้และวิธีการของผู้สอน (ไมตรี อินทร์ประสิทธิ์ และคณะ, 2550)

ในปัจจุบันนี้การเรียนการสอนคณิตศาสตร์มุ่งเน้นผลการเรียนรู้มากกว่ากระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์ และการสอนเป็นการอธิบายโดยผู้สอนเป็นผู้ส่งมอบความให้กับผู้เรียน ผู้เรียนเป็นผู้เพียงท่องจำ และทำตามขั้นตอนวิธีการคิดตามผู้สอน ไม่ได้มีการพัฒนาการเรียนรู้และการคิดทางคณิตศาสตร์ได้ กระทรวงศึกษาธิการ (2553) เสนอแนะว่า การสอนที่ดีในระดับอุดมศึกษานั้นจะเกิดขึ้นได้ก็ต่อเมื่อผู้สอนต้องรู้จักวิธีคิดของผู้เรียน โดยการเปลี่ยนชั้นเรียนที่เน้นให้ผู้เรียนได้เรียนรู้เพื่อสร้างความหมายสิ่งที่เรียนรู้ด้วยตนเองและสามารถนำความรู้ไปประยุกต์ใช้ได้

ในศตวรรษที่ 21 กระบวนการจัดการเรียนการสอนเป็นการเปลี่ยนแปลงกระบวนการเรียนรู้ที่เน้นให้ผู้เรียนเกิดการคิดอย่างผู้เชี่ยวชาญ (Expert Thinking) หรือการสื่อสารที่มีความซับซ้อน (Complex Communication) และการที่จะทำให้เกิดการเรียนรู้อย่างคณิตศาสตร์เพื่อให้สอดคล้องกับการเรียนรู้ในศตวรรษที่ 21 จำเป็นต้องถูกขับเคลื่อนมาจากวิธีการสอน (ไมตรี อินทร์ประสิทธิ์, 2557) ซึ่งวิธีการสอนที่ดีส่งผลให้เกิดกระบวนการเรียนรู้อย่างเต็มตามศักยภาพและเอื้อประโยชน์ให้เกิดการเรียนรู้ของผู้เรียนแต่ละคน ผู้สอนสามารถดึงเอาศักยภาพของแต่ละบุคคลมาใช้ในการเรียนคณิตศาสตร์ได้ (Shimada & Becker, 1997)

นวัตกรรมการสอนจำเป็นต้องจัดการเรียนการสอนเพื่อค้นหากระบวนการเรียนรู้อันจะส่งผลไปถึงการพัฒนากระบวนการเรียนรู้ได้ และวิธีการสอนที่เน้นการเรียนรู้ของแต่ละคนเป็นเป้าหมายที่เคลื่อนย้ายเข้าสู่ศตวรรษที่ 21 นอกจากนี้ต้องจัดเตรียมพื้นที่ให้นักเรียนแสดงความสามารถในการตรวจสอบตนเองว่าควรทำอะไร ผลักดันให้สร้างแนวคิดของตนเองด้วยวิธีการของตนเอง และดำเนินการด้วยวิธีการของตนเองอย่างอิสระ (ไมตรี อินทร์ประสิทธิ์, 2557)

ด้วยเหตุนี้จึงมีคำถามวิจัยเกิดขึ้นว่า การจัดการเรียนการสอนในสถาบันอุดมศึกษาที่ผลักดันให้นักเรียนเกิดการเรียนรู้ตามธรรมชาติและความสนใจของนักเรียน นักเรียนจะสร้างแนวคิดอย่างไร

ดังนั้นงานวิจัยนี้จึงสนใจศึกษาการเรียนรู้เพื่อที่จะคิดอย่างคณิตศาสตร์ในศตวรรษที่ 21 ของนักศึกษาซึ่งถูกผลักดันมาจากการพัฒนาวิธีการสอนในชั้นเรียนคณิตศาสตร์ที่จะทำให้มีพื้นที่ในการคิดทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาอย่างอิสระ

2. วัตถุประสงค์ของการวิจัย

2.1 เพื่อสำรวจแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาในระดับปริญญาตรี

2.2 เพื่อศึกษาพัฒนาการแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรี

3. ขอบเขตของการวิจัย

3.1 กลุ่มเป้าหมายเป็นนักศึกษาระดับปริญญาตรีที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชาแคลคลูลัส 1 มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนคร ในปีการศึกษา 2561

4. นิยามศัพท์เฉพาะ

4.1 แนวคิดทางคณิตศาสตร์ (Mathematical ideas) หมายถึง การคิดของนักศึกษาที่ใช้วิธีตามความถนัดของของตนเอง เพื่อแก้ปัญหาและหาคำตอบซึ่งอาจเป็นวิธีการคิดที่ง่าย หรือวิธีการคิดที่มีความซับซ้อน

4.2 พัฒนาการแนวคิดทางคณิตศาสตร์ (The development of mathematical ideas) หมายถึง การคิดของนักศึกษาจากรูปธรรมไปสู่นามธรรม ผ่านการคิดแบบกึ่งนามธรรมและนำไปสู่การคิดที่เป็น กฎ สูตร หลักเกณฑ์ทางคณิตศาสตร์

4.3 การเรียนรู้เพื่อที่จะคิดอย่างคณิตศาสตร์ (Learning to think mathematically) หมายถึง การคิดของนักศึกษาจากโลกชีวิตจริงไปสู่โลกคณิตศาสตร์

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนคร

บทที่ 2
เอกสารและวรรณกรรมที่เกี่ยวข้อง

การศึกษาพัฒนาการแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรี อาศัยพื้นที่การพิจารณาการกระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาจากการเคลื่อนย้ายวิธีการคิดจากโลกชีวิตจริงไปสู่โลกคณิตศาสตร์ หรืออีกนัยหนึ่งคือกระบวนการคิดจากรูปธรรมไปสู่นามธรรม จากการแก้ปัญหา การคำนวณ การตรวจสอบและการพิสูจน์ เพื่อศึกษาว่านักศึกษาพัฒนาการคิดของตนเองได้อย่างไร

ดังนั้น จึงจำเป็นต้องอาศัยเอกสารและวรรณกรรมที่เกี่ยวข้อง ดังต่อไปนี้

2.1 แนวคิดทางคณิตศาสตร์ (Mathematical ideas)

แนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาเป็นกระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์ที่เป็นวิธีธรรมชาติตามความถนัดหรือความสนใจของนักศึกษาที่แสดงถึง วิธีการคิดที่ง่ายหรือวิธีการคิดที่มีความซับซ้อนมากขึ้น แบ่งออกเป็น 4 ประเภทของการคิด คือ

2.1.1 การใช้วิธีการคิดอย่างง่าย (Thinking that simplifying) เป็นวิธีการคิดที่แสดงถึงวิธีการคิดพื้นฐานท การคิดที่ไม่มีความซับซ้อน สามารถเข้าใจได้และไม่เกิดความยุ่งยาก

2.1.2 การใช้วิธีการคิดให้เป็นกรณีทั่วไป (Thinking that generalizes) เป็นวิธีการคิดที่แสดงถึงวิธีการคิดที่เป็นหลักการหรือกฎ ที่พัฒนามาจากตัวอย่างเฉพาะ

2.1.3 การใช้วิธีการคิดให้เป็นกรณีเฉพาะ (Thinking that specializes) เป็นวิธีการคิดที่แสดงถึงวิธีการคิดที่ไม่เหมือนวิธีการคิดอื่นๆ แสดงถึงความเป็นอัตลักษณ์ของตนเอง

2.1.4 การใช้วิธีการคิดจากสัจพจน์ สูตร นิยาม หรือทฤษฎีบท (Thinking that symbolizes) เป็นวิธีการคิดที่แสดงถึงการใช้สัจพจน์ สูตร นิยามหรือทฤษฎีบท (Isoda & Katagiri, 2012)

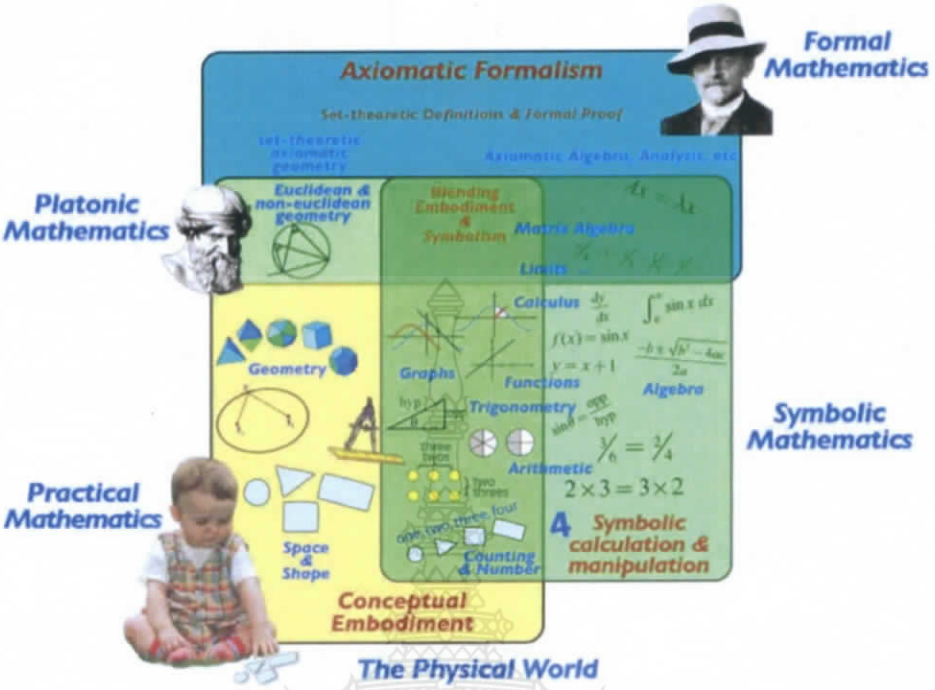
2.2 พัฒนาการแนวคิดทางคณิตศาสตร์ (The development of mathematical ideas)

พัฒนาการแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาเป็นกระบวนการคิดที่ของนักศึกษาจากรูปธรรมไปสู่นามธรรม ผ่านการคิดแบบกึ่งนามธรรมและนำไปสู่การคิดที่เป็น กฎ สูตร หลักเกณฑ์ทางคณิตศาสตร์ เป็นการคิดที่แสดงถึงการคิดพื้นฐานไปสู่การคิดขั้นสูง แบ่งออกเป็น 3 ระดับของพัฒนาการแนวคิดทางคณิตศาสตร์ คือ

2.2.1 ระดับรูปธรรม (Embodiment world) คือ แนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่ใช้การคิดกับสื่อ อุปกรณ์หรือวัตถุทายกายภาพ

2.2.2 ระดับกึ่งนามธรรม (Symbolism world) คือ แนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่ไม่อาศัยการคิดกับสื่อ อุปกรณ์หรือวัตถุทางกายภาพ แต่เป็นการคิดที่ใช้วิธีการคิดที่ใช้สัญลักษณ์ทางคณิตศาสตร์

2.2.3 ระดับนามธรรม (Formalism) คือ แนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่ใช้สัจพจน์ สูตร นิยาม หรือ ทฤษฎีบทในการคิดทางคณิตศาสตร์ (Tall, 2004)



Tall (2004)

2.3 การเรียนรู้เพื่อที่จะคิดอย่างคณิตศาสตร์ (Learning to think mathematically)

การเรียนรู้เพื่อที่จะคิดอย่างคณิตศาสตร์เป็นการคิดของนักศึกษาจากโลกชีวิตจริงไปสู่โลกคณิตศาสตร์

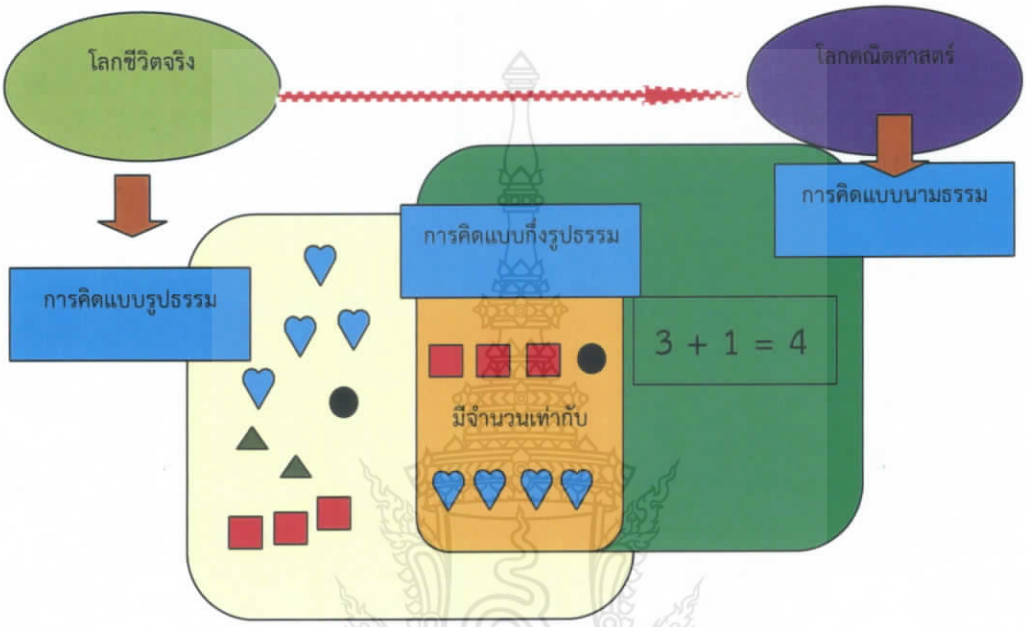
Becker & Shimada (1997) ได้เสนอแนะถึง การเรียนรู้เพื่อที่จะคิดอย่างคณิตศาสตร์ เป็นการเชื่อมโยงโลกชีวิตกับโลกคณิตศาสตร์ผ่านวิธีการคิดต่างๆ ดังนี้

Becker & Shimada (1997)

จากการทบทวนเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องจึงได้กรอบแนวคิดเชิงทฤษฎีที่นำมาวิเคราะห์ ดังนี้

2.4 กรอบแนวคิดเชิงทฤษฎีที่นำมาวิเคราะห์ (Conceptual framework)

กรอบแนวคิดเชิงทฤษฎีที่นำมาวิเคราะห์อาศัยแนวคิดของ Tall (2004) และ Becker & Shimada (1997) ซึ่งทำให้พื้นที่ในการคิดทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาในชั้นเรียนตามความถนัดและความสนใจของนักศึกษา และวิธีการคิดที่นักศึกษาใช้อาศัยกรอบของ Isoda & Katakiri (2012) ดังนี้



กรอบแนวคิดเชิงทฤษฎีที่นำมาวิเคราะห์ (ณิศรา, 2019)

มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนคร

บทที่ 3
วิธีการดำเนินการวิจัย

การศึกษาพัฒนาการแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรี ใช้วิธีการวิจัยเชิงคุณภาพ อาศัยการวิเคราะห์ข้อมูลตามกรอบแนวคิดเชิงทฤษฎีและตีความหมายจากข้อมูลสามเส้า คือ ข้อมูลเชิงประจักษ์ (หลักฐานผลงานนักศึกษา) กรอบแนวคิดเชิงทฤษฎีและการสัมภาษณ์นักศึกษาจากกลุ่มเป้าหมาย ดังต่อไปนี้

3.1 กลุ่มเป้าหมาย

กลุ่มเป้าหมายเป็นนักศึกษาชั้นปีที่ 1 ที่เรียนรายวิชาแคลคูลัส 1 ในปีการศึกษาที่ 2/2561 จำนวน 1 ห้องเรียน โดยแบ่งเป็นกลุ่มเพื่อเก็บข้อมูล (ตามแผนภาพในหัวข้อ 3.5)

3.2 เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

3.2.1 สถานการณ์ปัญหา 2 สถานการณ์ปัญหา

3.2.2 กรอบแนวคิดเชิงทฤษฎี (ดังหัวข้อ 2.4)

3.3 วิธีการดำเนินการวิจัย

การดำเนินการวิจัยแบ่งออกเป็น 5 ระยะ คือ

3.3.1 สร้างสถานการณ์ปัญหาเพื่อคาดการณ์แนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษา

3.3.2 สำรวจแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาโดยใช้สถานการณ์ปัญหาจากการบันทึกภาคสนาม

3.3.3 วิเคราะห์แนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาตามกรอบแนวคิดเชิงทฤษฎี และการสัมภาษณ์นักศึกษา พร้อมกับผลงานของนักศึกษา

3.3.4 อภิปรายผลการวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อทำการสรุปผลต่อไป

3.4 การวิเคราะห์

3.4.1 สถานการณ์ปัญหาที่ 1 “ฉันเปลี่ยนแปลงอย่างไร” เพื่อหานิยามอนุพันธ์

3.4.2 สถานการณ์ปัญหาที่ 2 “ใครเร็วกว่ากัน” เพื่อหาความเร็วและความเร่ง

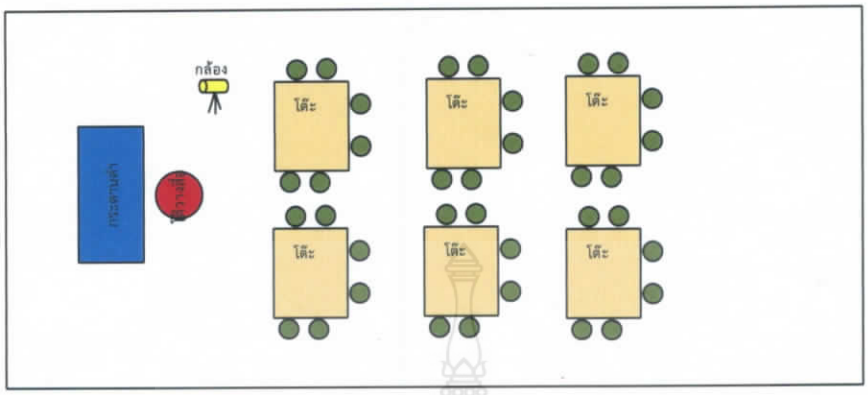
3.5 วิธีการเพื่อให้ได้มาซึ่งข้อมูล

1. ผู้สอนใช้สถานการณ์ปัญหาสอนกับนักศึกษาในห้องเรียนทั้ง 2 สถานการณ์ปัญหา
2. ผู้สอนให้นักศึกษาคิดภายในกลุ่มและให้นักศึกษาภายในกลุ่มส่งตัวแทนแสดงวิธีการคิดหน้าชั้นเรียน
3. ผู้สอนซักถามถึงที่มาของวิธีการคิดของนักศึกษา

หมายเหตุ: ใช้วีดิโอบันทึกการสอนในชั้นเรียน

4. ผู้สอนนำวีดิโอมาเปิดซ้ำเพื่อทำบันทึกภาคสนามและวิเคราะห์ข้อมูลตามกรอบการวิเคราะห์

3.6 แผนผังการเก็บข้อมูลภาคสนาม



มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนคร

บทที่ 4
การวิเคราะห์ผลและการอภิปรายผล

การศึกษาพัฒนาการแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยการวิเคราะห์ผลจากสถานการณ์ปัญหา 2 สถานการณ์ปัญหา ตามกรอบแนวคิดเชิงทฤษฎี

4.1 การวิเคราะห์ผลการวิจัย

4.1 การวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหา

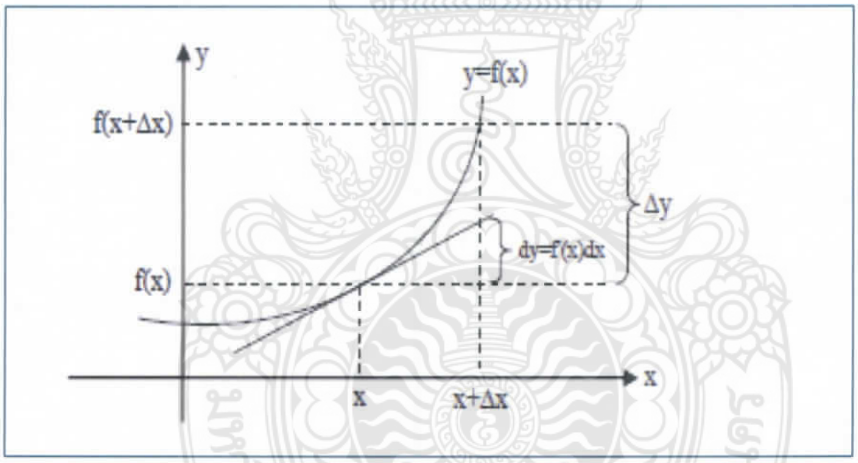
4.1.1.1 การวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาที่ 1

การวิเคราะห์ข้อมูลกิจกรรม "ฉันเปลี่ยนแปลงอย่างไร" (เพื่อหานิยามอนุพันธ์)

สถานการณ์ปัญหาที่ 1 "ฉันเปลี่ยนแปลงอย่างไร"

<u>คำชี้แจง</u>

คำสั่งที่ 1: จากภาพที่กำหนดให้นักศึกษาแต่ละคนจินตนาการการเคลื่อนที่ของกราฟว่าเปลี่ยนแปลงอย่างไร เมื่อเลื่อนตามแกน x และเลื่อนตามแกน y



จากสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้ นักศึกษาได้ใช้แนวคิด ดังต่อไปนี้

1. ทิศทางการเคลื่อนที่ของกราฟจากล่างขึ้นบน

> ในขณะที่กราฟเคลื่อนที่ไปทางขวาห่างจากแกน x กราฟจะเคลื่อนที่สูงขึ้นห่างจากแกน y

2. ลักษณะกราฟจากการเคลื่อนที่เป็นเส้นตรงหรือเส้นโค้ง

> กราฟเคลื่อนที่เป็นเส้นตรง และเคลื่อนที่เป็นเส้นโค้ง

3. ระยะทางจากแกน x และแกน y แปรผันตรงกับการเคลื่อนที่ของกราฟ

ระยะห่างจากการแกน x และแกน y มากขึ้น เมื่อกราฟเคลื่อนห่างจากแกน x มากขึ้น และกราฟสูงขึ้น

จากการจินตนาการของนักศึกษา นักศึกษาเห็นถึงความสัมพันธ์ของการเคลื่อนที่ระหว่างแกน x และ แกน y

คำสั่งที่ 2: 1. ให้นักศึกษาเลื่อนกราฟจากแผ่นพลาสติกใสตามรางเลื่อน x และ y
2. ให้นักศึกษาพิจารณาความสัมพันธ์ระหว่างแกน x และ แกน y

หมายเหตุ: ครูคอยกระตุ้นให้นักศึกษาคิดและใช้หลักการทางคณิตศาสตร์

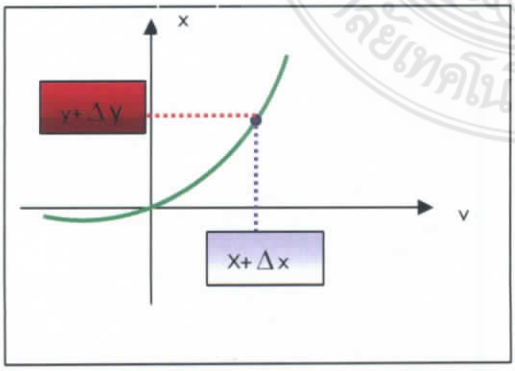
<u>อุปกรณ์</u> แผ่นพลาสติกใสและรางเลื่อนแกน x และ แกน y ดังรูป ข้างล่าง

จากสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้นักศึกษาได้ใช้แนวคิด ดังต่อไปนี้

1. นักศึกษาในแต่ละกลุ่มจินตนาการและพูดคุยกันว่าเมื่อเลื่อนกราฟจะเลื่อนไปยังทิศทางใด เมื่อเลื่อนแกน x

2. เมื่อนักศึกษาในแต่ละกลุ่มเลื่อนแกน x ไปในทิศทางทั้งซ้ายและขวา

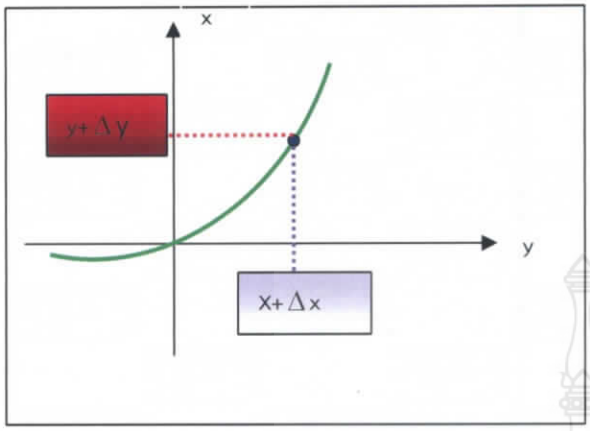
2.1 นักศึกษาสังเกตทิศทางการเลื่อนของแกน x กับแกน y



ในขณะที่กราฟเคลื่อนที่ไปทางขวาห่างจากแกน x กราฟจะเคลื่อนที่สูงขึ้นห่างจากแกน y และในขณะที่กราฟเคลื่อนที่ไปซ้ายห่างจากแกน x กราฟจะเคลื่อนที่ต่ำลงจากแกน y

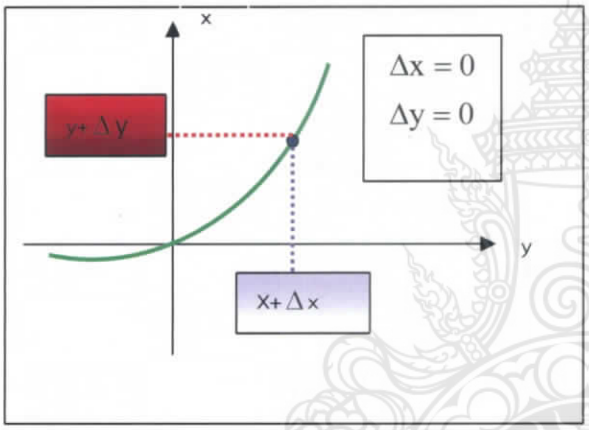
นักศึกษาสังเกตการณ์แปรผันตรงของแกน x และแกน y

2.2 นักศึกษาพิจารณาถึงค่า Δx และค่า Δy กับระทาง



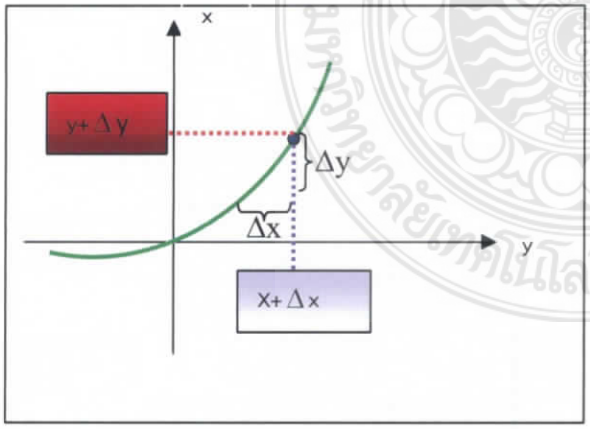
ในขณะที่กราฟเคลื่อนที่ไปทางขวาห่างจากแกน x ค่าของ Δx จะมากขึ้น กราฟจะเคลื่อนที่สูงขึ้นห่างจากแกน y ค่าของ Δy จะมากขึ้น และในขณะที่กราฟเคลื่อนที่ไปซ้ายห่างจากแกน x ค่าของ Δx จะน้อยลง กราฟจะเคลื่อนที่ต่ำลงจากแกน y ค่าของ Δy จะน้อยลง

2.3 นักศึกษาพิจารณาถึงค่า Δx และค่า Δy กับ จุดเปลี่ยนแปลงของกราฟ



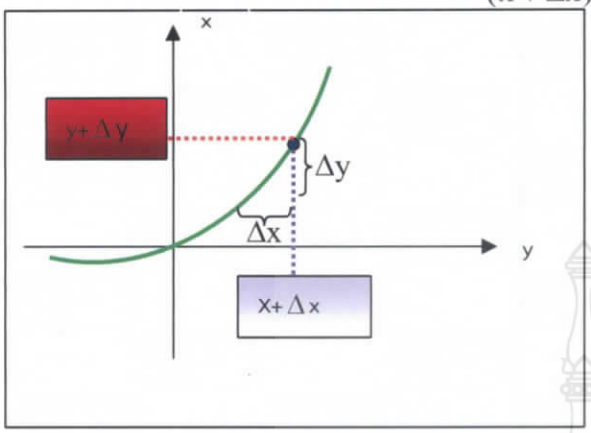
ถ้า $\Delta x = 0$ และ $\Delta y = 0$ กราฟจะไม่เกิดการเปลี่ยนแปลง นั่นแสดงได้ว่า ถ้า $\Delta x \to 0$ และ $\Delta y \to 0$ กราฟจะเกิดการเปลี่ยนแปลงเพียงเล็กน้อย

2.4 นักศึกษาพิจารณาความสัมพันธ์ของ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ กับความชัน



นักศึกษาพิจารณาถึงความชันที่ได้จาก $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ซึ่งสัมพันธ์กับ $\lim_{\Delta x \to 0} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{(x+\Delta x)-x}$

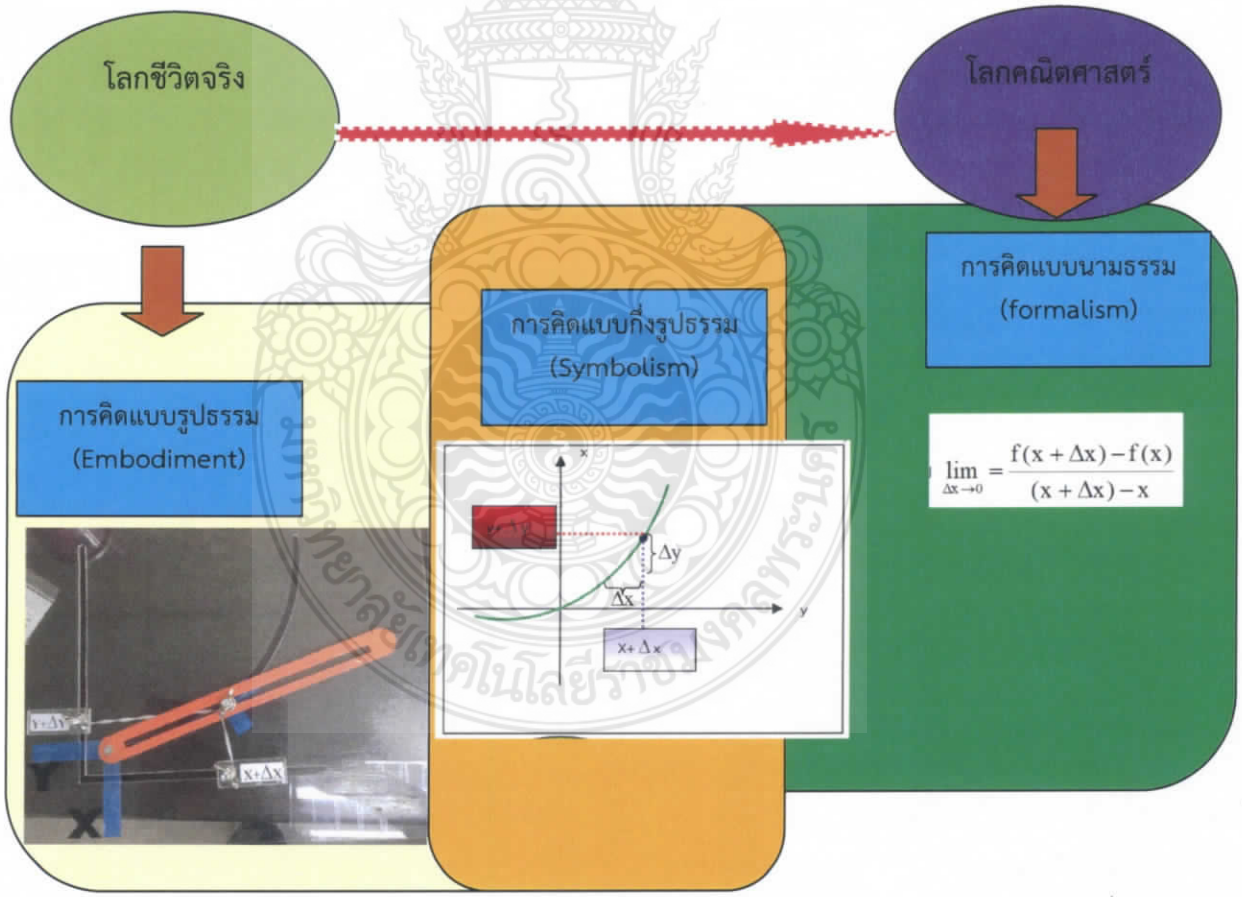
2.5 นักศึกษาพิจารณาถึง ค่า $\lim_{\Delta x \to 0} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{(x+\Delta x)-x}$ (ความชัน) กับการหาอนุพันธ์



นักศึกษาพิจารณาถึงความชันที่ได้จาก $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ ซึ่งสัมพันธ์กับ $\lim_{\Delta x \to 0} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{(x+\Delta x)-x}$ ซึ่งเป็นการหาค่าการเปลี่ยนแปลง ณ จุดๆ หนึ่ง

การวิเคราะห์ตามกรอบแนวคิดเชิงทฤษฎี

วิธีการคิดของนักศึกษาจากสื่ออุปกรณ์ที่เป็นรูปธรรมแล้วพัฒนามาสู่ นิยามทางคณิตศาสตร์



นักศึกษาสามารถเห็นความสัมพันธ์ระหว่าง $\Delta x \to 0$ และ $\Delta y \to 0$ กับความสัมพันธ์ของ ความชันซึ่งมีค่าเท่ากับ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ และพัฒนามาสู่การหานิยามของอนุพันธ์โดยใช้ความรู้ที่มีมาก่อนหน้านี้มาใช้ในการหาค่า

$\lim_{\Delta x \to 0} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{(x+\Delta x)-x}$ ซึ่งเป็นผลมาจากการสร้างสถานการณ์ปัญหาให้นักศึกษาได้ลงมือปฏิบัติจริง โดยนักศึกษาใช้การพัฒนาวิธีการคิดจากวิธีการแก้ปัญหาที่ได้ลงมือปฏิบัติไปสู่วิธีการคิดทางคณิตศาสตร์ที่มีความสลับซับซ้อน และเชื่อมโยงวิธีการคิดต่างๆ จากวิธีการคิดหาค่าการเปลี่ยนแปลงเพื่อสร้างวิธีการคิดในการหานิยามของอนุพันธ์ และสร้างแนวคิดในการแก้ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพ อาศัยวิธีการคิดจากรูปและวาดรูปเพื่อหาคำตอบ ทำให้นักศึกษาขยายแนวคิดจากแนวคิดพื้นฐานไปสู่แนวคิดที่แนวคิดที่มีความสลับซับซ้อนขึ้น โดยการต่อยอดจากแนวคิดหรือวิธีการคิดที่มีมาก่อนหน้านี้ในการอธิบายหรือลงมือกระทำเพื่อให้ได้มาซึ่งหลักการ สูตรเกี่ยวกับคณิตศาสตร์

4.1.1.2 การวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาที่ 2

การวิเคราะห์ข้อมูลกิจกรรม “ใครเร็วกว่ากัน” (เพื่อหาความเร็วและความเร่ง)

สถานการณ์ปัญหาที่ 1 “ใครเร็วกว่ากัน”

<u>คำชี้แจง</u> 1. ให้นักศึกษาแต่ละคนจินตนาการ “ถ้าปล่อยลูกแก้วในรางทั้ง 4 พร้อมกัน ลูกแก้วในรางใดจะถึงเส้นชัยก่อน”

2. ให้นักศึกษาอภิปรายร่วมกันในกลุ่ม

3. ให้นักศึกษาในแต่ละกลุ่มปล่อยลูกเหล็กทั้ง 4 รางพร้อมกัน และให้สังเกตว่าลูกแก้วรางใดจะถึงเร็วที่สุด พร้อมทั้งให้เหตุผลประกอบ

หมายเหตุ: ครูคอยกระตุ้นให้นักศึกษาคิดและใช้หลักการทางคณิตศาสตร์

<u>อุปกรณ์</u> ลูกแก้วและรางลูกแก้ว 4 ราง

จากสถานการณ์ปัญหาที่กำหนดให้นักศึกษาได้ดำเนินการการใช้แนวคิด ดังต่อไปนี้

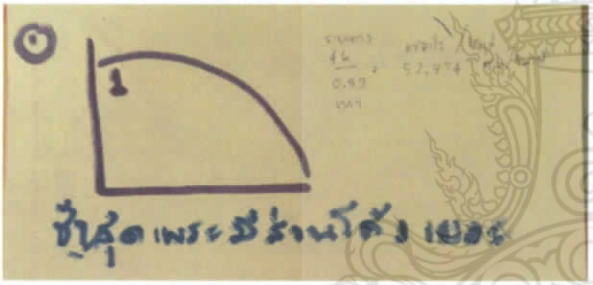
1. นักศึกษาในแต่ละกลุ่มจินตนาการและพูดคุยกันว่าลูกแก้วในรางใดจะถึงพื้นเร็วที่สุด

2. เมื่อนักศึกษาในแต่ละกลุ่มปล่อยลูกเหล็กทั้ง 4 รางพร้อมกัน

2.1 นักศึกษาสังเกตลูกแก้วในรางใดถึงเร็วที่สุด

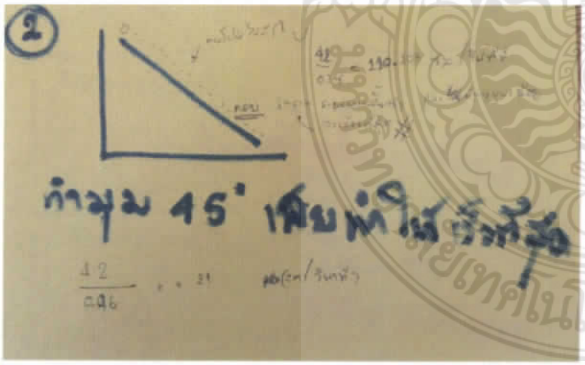
2.2 นักศึกษาหาวิธีการคิดเพื่อหาวิธีการคำนวณ ดังต่อไปนี้

วิธีที่ 1 พิจารณาส่วนโค้ง



ส่วนโค้งมากทำให้ลูกแก้วถึงช้าที่สุด

วิธีที่ 2 พิจารณามุม



มุม 45° ทำให้ลูกแก้วถึงเร็วที่สุด

วิธีที่ 3 ใช้เชือกมาวัดระยะทาง

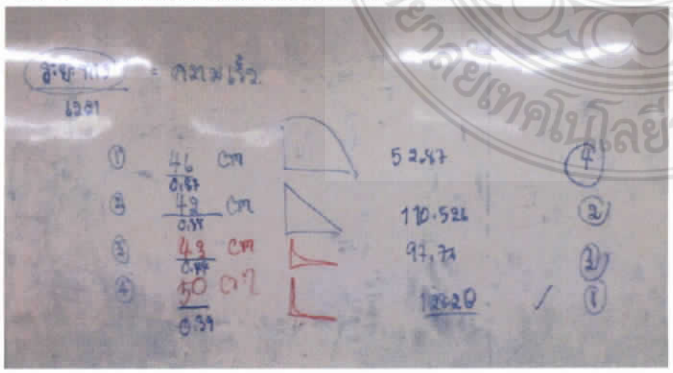
หาระยะทางว่า ระยะทางใดยาว ซึ่งส่งผลให้ลูกแก้วถึงช้าที่สุด

ระยะทางสั้นทำให้ลูกแก้วถึงเร็ว

ระยะทางยาวทำให้ลูกแก้วถึงช้า

วิธีที่ 4 ใช้นาฬิกาจับเวลา

วิธีที่ 5 ใช้ความสัมพันธ์ของระยะทางกับเวลา



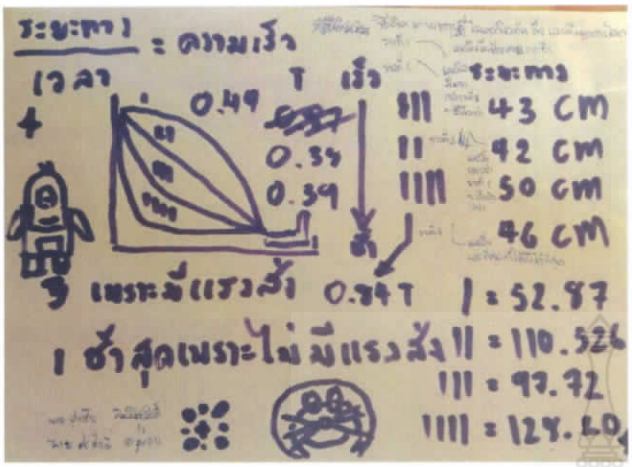
ระยะทาง ÷ เวลา = ความเร็ว

1. $\frac{46}{0.87} = 52.87$

2. $\frac{42}{0.38} = 110.52$

3. $\frac{43}{0.44} = 97.72$

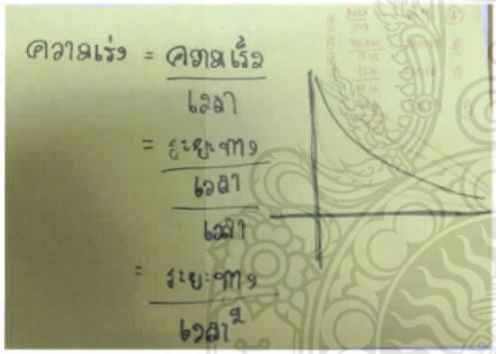
4. $\frac{50}{0.39} = 128.20$



นักศึกษาค้นพบว่า เมื่อนำความยาวของรางลูกแก้วมาหารเวลาจะได้ความเร็วของลูกแก้วที่ถึงเส้นชัย (ความเร็ว = ระยะทาง ÷ เวลา)

วิธีที่ 6 ใช้ความสัมพันธ์ของระยะทางกับเวลา

พัฒนาวิธีการหาความเร็วมาต่อยอดการหาความเร่ง นักศึกษาค้นพบว่า ลูกแก้วที่ถึงเส้นชัยก่อนมีความเร่งมากที่สุด (ความเร่ง = ความเร็ว ÷ เวลา = ระยะทาง ÷ เวลา^2)



$$\frac{52.87}{0.87} = 60.77$$

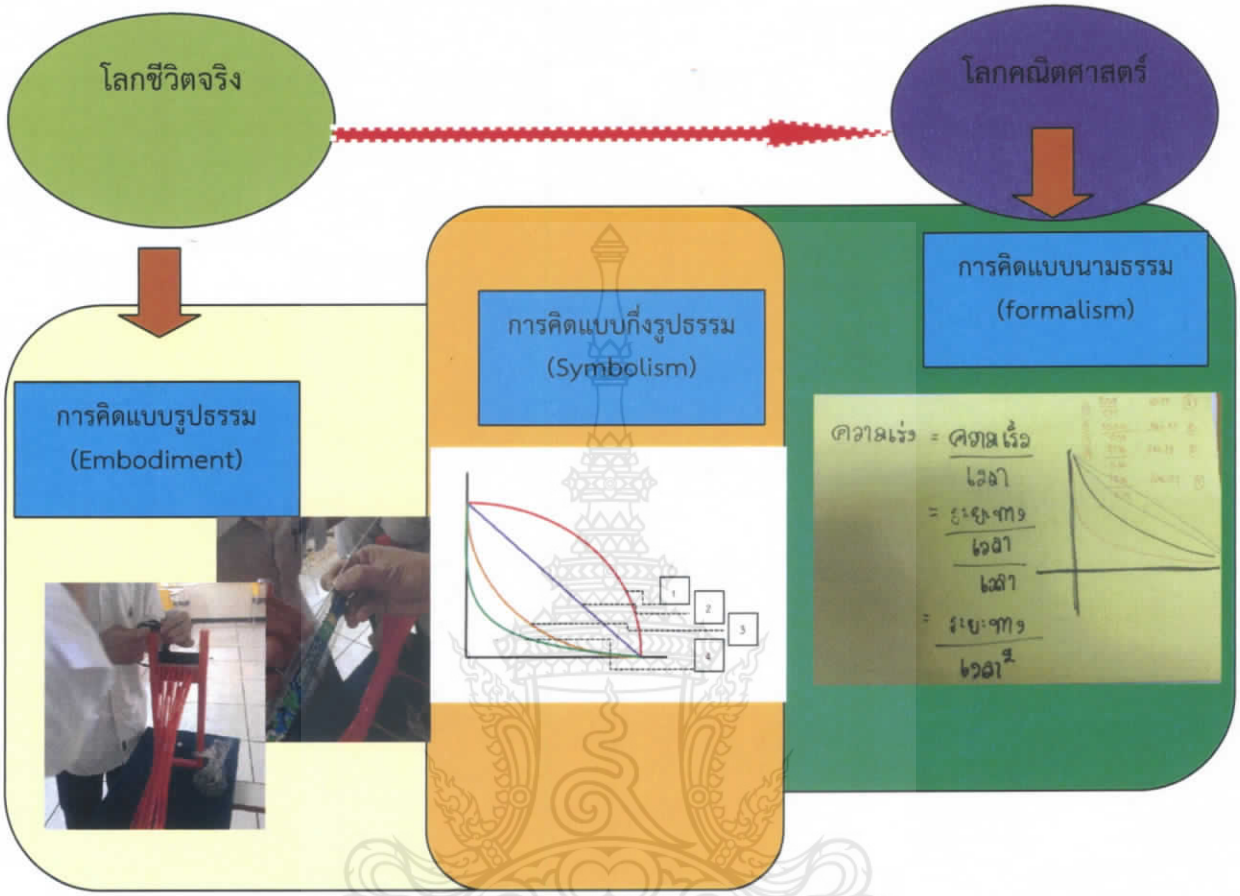
$$\frac{110.53}{0.38} = 290.85$$

$$\frac{97.76}{0.44} = 222.18$$

$$\frac{128.30}{0.39} = 328.71$$

วิธีการคิดของนักศึกษาแต่ละวิธีตรวจสอบจากการปล่อยลูกแก้วเพื่อหาความเร็วในการถึงเส้นชัย

การวิเคราะห์ตามกรอบแนวคิดเชิงทฤษฎี



นักศึกษาสามารถเห็นความสัมพันธ์ระหว่าง ความเร็ว กับความเร่ง จากการเริ่มต้นหาความเร็วจากความสัมพันธ์ของระยะทางกับเวลา และพัฒนาต่อยอดไปสู่การหาความเร่งได้ความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วกับเวลา ซึ่งเป็นผลมาจากการสร้างสถานการณ์ปัญหาให้นักศึกษาได้ลงมือปฏิบัติจริง โดยนักศึกษาใช้การพัฒนาวิธีการคิดจากวิธีการแก้ปัญหาที่ได้ลงมือปฏิบัติไปสู่วิธีการคิดทางคณิตศาสตร์ที่มีความสลับซับซ้อน และเชื่อมโยงวิธีการคิดต่างๆ จากวิธีการคิดหาค่าความเร็วเพื่อสร้างวิธีการคิดที่การหาความเร่ง และสร้างแนวคิดในการแก้ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพ อาศัยวิธีการแก้ปัญหาวิธีการเดียวไปสู่วิธีการที่หลากหลาย ทำให้นักศึกษาขยายแนวคิดจากแนวคิดพื้นฐานไปสู่แนวคิดที่แนวคิดที่มีความสลับซับซ้อนขึ้น โดยการต่อยอดจากแนวคิดหรือวิธีการคิดที่มีมาก่อนหน้านี้ในการอธิบายหรือลงมือกระทำเพื่อให้ได้มาซึ่งหลักการ สูตร เกี่ยวกับคณิตศาสตร์

4.2 การสรุปผลการวิเคราะห์

นักศึกษาใช้การพัฒนาวิธีการคิดจากวิธีการแก้ปัญหาที่ได้ลงมือปฏิบัติไปสู่วิธีการคิดทางคณิตศาสตร์ที่มีความสลับซับซ้อน และเชื่อมโยงวิธีการคิดต่างๆ อาศัยวิธีการแก้ปัญหาวิธีการเดียวไปสู่วิธีการที่หลากหลาย ทำให้นักศึกษาขยายแนวคิดจากแนวคิดพื้นฐานไปสู่แนวคิดที่แนวคิดที่มีความสลับซับซ้อนขึ้น โดยการต่อยอดจาก

แนวคิดหรือวิธีการคิดที่มีมาก่อนหน้านี้ในการอธิบายหรือลงมือกระทำเพื่อให้ได้มาซึ่งหลักการ สูตร เกี่ยวกับคณิตศาสตร์

4.3 การอภิปรายผลการวิจัย

4.2.1 วิธีการที่นักศึกษาใช้

1. นักศึกษาปฏิบัติการคิดคำนวณกับสื่อการสอนแล้วขยายผลการคิดคำนวณ
2. นักศึกษาใช้วิธีการพิสูจน์เพื่อหาวิธีการและผลลัพธ์ที่ได้
3. นักศึกษาใช้วิธีการที่หลากหลายเพื่อหาคำตอบ
4. นักศึกษาใช้วิธีการเฉพาะและต่อยอดแนวคิดที่มีอยู่เดิมเพื่อให้ได้มาด้วยวิธีการที่เป็นหลักการทางคณิตศาสตร์

4.2.2 แนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่เกิดขึ้น

1. แนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาเริ่มต้นเป็นการคาดเดาหรือจินตนาการผลลัพธ์ที่เกิดขึ้น
2. แนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาเกิดขึ้นจากการต่อยอดและค่อยๆ พัฒนาแนวคิดที่มีอยู่เดิม
3. แนวคิดทางคณฺตศาสตร์ของนักศึกษาเกิดขึ้นจากการใช้วิธีการที่หลากหลายและเชื่อมโยงแนวคิดต่างๆ

4.2.3 พัฒนาการแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่เกิดขึ้น

1. นักศึกษาพัฒนาการคิดจากการปฏิบัติการกับสื่อมาสู่การคิดเชิงสัญลักษณ์และนำไปสู่กฎ หลักการทางคณิตศาสตร์ในท้ายสุด
2. นักศึกษาเชื่อมโยงวิธีการคิดทางคณิตศาสตร์เพื่อต่อยอดเป็นแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่ถูกพัฒนาขึ้น
3. นักศึกษาเริ่มต้นจากการคิดพื้นฐานไปสู่การคิดที่มีความสลับซับซ้อนมากขึ้น

4.4 การสะท้อนผลการวิจัย

พัฒนาการแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาถูกผลักดันจากการได้ลงมือปฏิบัติการสื่อการสอนที่เป็นรูปธรรมไปสู่กระบวนการคิดเชิงสัญลักษณ์และนำไปสู่การคิดในรูปแบบคณิตศาสตร์ในท้ายสุด สอดคล้องกับงานวิจัยของ Tall (2013) ที่กล่าวถึงการคิดแบบลงมือปฏิบัติ (Practical thinking) เป็นการคิดที่เกิดประสิทธิภาพและนำไปใช้ได้จริงกับทุกสถานการณ์ปัญหา

บทที่ 5
การสรุปผลการวิจัย

งานวิจัยนี้มีวัตถุประสงค์เพื่อสำรวจแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาในระดับปริญญาตรี และศึกษาพัฒนาการแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรี กับนักศึกษาปริญญาตรีที่ลงทะเบียนเรียนรายวิชาแคลคลูลัส 1 มหาวิทยาลัยเทคโนโลยีราชมงคลพระนคร ในปีการศึกษา 2561

งานวิจัยนี้ได้อาศัยแนวคิดเชิงทฤษฎีจนสร้างคำนิยามศัพท์เฉพาะเพื่อเปรียบเสมือนเป็นเลนส์ในการส่องดูพัฒนาการคิดของนักศึกษาระดับปริญญาตรีที่เกิดขึ้นในห้องเรียน ดังนี้

1. แนวคิดทางคณิตศาสตร์ หมายถึง การคิดของนักศึกษาที่ใช้วิธีตามความถนัดของของตนเอง เพื่อแก้ปัญหาและหาคำตอบซึ่งอาจเป็นวิธีการคิดที่ง่าย หรือวิธีการคิดที่มีความซับซ้อน

2. พัฒนาการแนวคิดทางคณิตศาสตร์ หมายถึง การคิดของนักศึกษาจากรูปธรรมไปสู่นามธรรม ผ่านการคิดแบบกึ่งนามธรรมและนำไปสู่การคิดที่เป็น กฎ สูตร หลักเกณฑ์ทางคณิตศาสตร์

3. การเรียนรู้เพื่อที่จะคิดอย่างคณิตศาสตร์ หมายถึง การคิดของนักศึกษาจากโลกชีวิตจริงไปสู่โลกคณิตศาสตร์

โดยอาศัยพื้นที่การพิจารณาการกระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาจากการเคลื่อนย้ายวิธีการคิดจากโลกชีวิตจริงไปสู่โลกคณิตศาสตร์ หรืออีกนัยหนึ่งคือกระบวนการคิดจากรูปธรรมไปสู่นามธรรม จากการแก้ปัญหา การคำนวณ การตรวจสอบและการพิสูจน์ เพื่อศึกษาว่านักศึกษาพัฒนาการคิดของตนเองได้อย่างไร จากเอกสารและวรรณกรรมที่เกี่ยวข้อง ดังต่อไปนี้

1. แนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาเป็นกระบวนการคิดทางคณิตศาสตร์ที่เป็นวิธีธรรมชาติตามความถนัดหรือความสนใจของนักศึกษาที่แสดงถึง วิธีการคิดที่ง่ายหรือวิธีการคิดที่มีความซับซ้อนมากขึ้น แบ่งออกเป็น 4 ประเภทของการคิด คือ การใช้วิธีการคิดอย่างง่าย การใช้วิธีการคิดให้เป็นกรณีทั่วไป การใช้วิธีการคิดให้เป็นกรณีเฉพาะ การใช้วิธีการคิดจากสัจพจน์ สูตร นิยาม หรือทฤษฎีบท (Isoda & Katagiri, 2012)

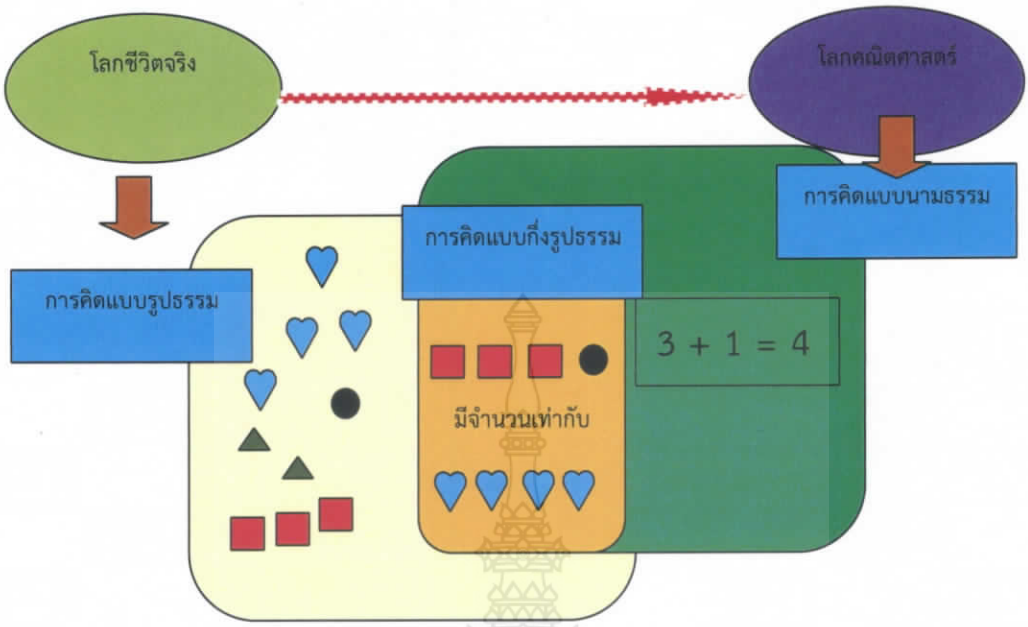
2. พัฒนาการแนวคิดทางคณิตศาสตรของนักศึกษาเป็นกระบวนการคิดที่ของนักศึกษาจากรูปธรรมไปสู่นามธรรม ผ่านการคิดแบบกึ่งนามธรรมและนำไปสู่การคิดที่เป็น กฎ สูตร หลักเกณฑ์ทางคณิตศาสตร์ เป็นการคิดที่แสดงถึงการคิดพื้นฐานไปสู่การคิดขั้นสูง แบ่งออกเป็น 3 ระดับของพัฒนาการแนวคิดทางคณิตศาสตร์ คือ ระดับรูปธรรม ระดับกึ่ง ระดับนามธรรม (Formalism) คือ แนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่ใช้สัจพจน์ สูตร นิยาม หรือ ทฤษฎีบทในการคิดทางคณิตศาสตร์ (Tall, 2004)

3. การเรียนรู้เพื่อที่จะคิดอย่างคณิตศาสตร์ เป็นการคิดของนักศึกษาจากโลกชีวิตจริงไปสู่โลกคณิตศาสตร์

Becker & Shimada (1997) ได้เสนอแนะถึง การเรียนรู้เพื่อที่จะคิดอย่างคณิตศาสตร์ เป็นการเชื่อมโยงโลกชีวิตกับโลกคณิตศาสตร์ผ่านวิธีการคิดต่างๆ (Becker & Shimada, 1997)

จากการทบทวนเอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้องจึงได้กรอบแนวคิดเชิงทฤษฎีที่นำมาวิเคราะห์ ดังนี้

4. กรอบแนวคิดเชิงทฤษฎีที่นำมาวิเคราะห์



กรอบแนวคิดเชิงทฤษฎีที่นำมาวิเคราะห์ (ณิศรา, 2019)

วิธีการดำเนินการวิจัย

การศึกษาพัฒนาการแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรี ใช้วิธีการวิจัยเชิงคุณภาพ อาศัยการวิเคราะห์ข้อมูลตามกรอบแนวคิดเชิงทฤษฎีและตีความหมายจากข้อมูลสามเส้า คือ ข้อมูลเชิงประจักษ์ (หลักฐานผลงานนักศึกษา) กรอบแนวคิดเชิงทฤษฎีและการสัมภาษณ์นักศึกษาจากกลุ่มเป้าหมาย ดังต่อไปนี้

1. กลุ่มเป้าหมาย

กลุ่มเป้าหมายเป็นนักศึกษาชั้นปีที่ 1 ที่เรียนรายวิชาแคลคูลัส 1 ในปีการศึกษาที่ 2/2561 จำนวน 1 ห้องเรียน โดยแบ่งเป็นกลุ่มเพื่อเก็บข้อมูล (ตามแผนภาพในหัวข้อ 3.5)

2. เครื่องมือที่ใช้ในการวิจัย

2.1 สถานการณ์ปัญหา 2 สถานการณ์ปัญหา

2.2 กรอบแนวคิดเชิงทฤษฎี (ดังหัวข้อ 2.4)

3. วิธีการดำเนินการวิจัย การดำเนินการวิจัยแบ่งออกเป็น 5 ระยะ คือ

3.1 สร้างสถานการณ์ปัญหาเพื่อคาดการณ์แนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษา

3.2 สำรวจแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาโดยใช้สถานการณ์ปัญหาจากการบันทึกภาคสนาม

3.3 วิเคราะห์แนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาตามกรอบแนวคิดเชิงทฤษฎี และการสัมภาษณ์นักศึกษา พร้อมกับผลงานของนักศึกษา

3.4 อภิปรายผลการวิเคราะห์ข้อมูลเพื่อทำการสรุปผลต่อไป

4. การวิเคราะห์

4.1 สถานการณ์ปัญหาที่ 1 “ฉันเปลี่ยนแปลงอย่างไร” เพื่อหานิยามอนุพันธ์

4.2 สถานการณ์ปัญหาที่ 2 “ใครเร็วกว่ากัน” เพื่อหาความเร็วและความเร่ง

5. วิธีการเพื่อให้ได้ข้อมูลมา

5.1 ผู้สอนใช้สถานการณ์ปัญหาสอนกับนักศึกษาในห้องเรียนทั้ง 2 สถานการณ์ปัญหา

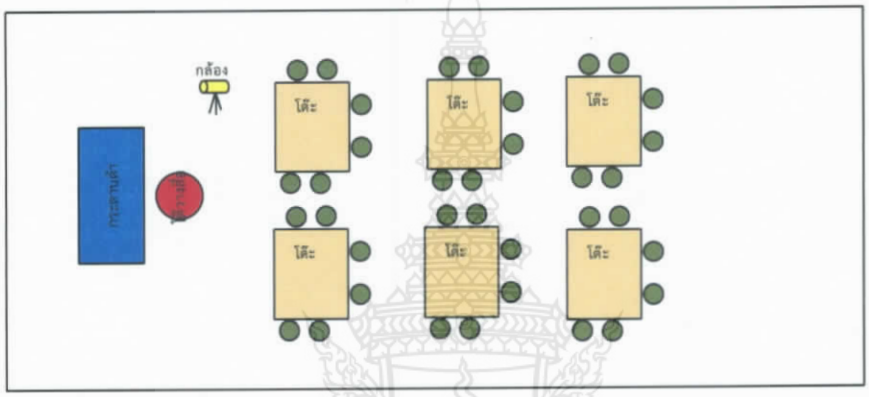
5.2 ผู้สอนให้นักศึกษาคิดภายในกลุ่มและให้นักศึกษาภายในกลุ่มส่งตัวแทนแสดงวิธีการคิดหน้าชั้นเรียน

5.3 ผู้สอนซักถามถึงที่มาของวิธีการคิดของนักศึกษา

หมายเหตุ: ใช้วีดิโอบันทึกการสอนในชั้นเรียน

5.4 ผู้สอนนำวีดิโอมาเปิดซ้ำเพื่อทำบันทึกภาคสนามและวิเคราะห์ข้อมูลตามกรอบการวิเคราะห์

6. แผนผังการเก็บข้อมูลภาคสนาม



การวิเคราะห์ผลและการอภิปรายผล

การศึกษาพัฒนาการแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาระดับปริญญาตรีโดยการวิเคราะห์ผลจากสถานการณ์ปัญหา 2 สถานการณ์ปัญหา ตามกรอบแนวคิดเชิงทฤษฎี

1. การวิเคราะห์สถานการณ์ปัญหาที่ 1 ฉันเปลี่ยนแปลงอย่างไร

นักศึกษาสามารถเห็นความสัมพันธ์ระหว่าง $\Delta x \to 0$ และ $\Delta y \to 0$ กับความสัมพันธ์ของ ความชันซึ่งมีค่าเท่ากับ $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ และพัฒนามาสู่การหานิยามของอนุพันธ์โดยใช้ความรู้ที่มีมาก่อนหน้านี้มาใช้ในการหาค่า $\lim_{\Delta x \to 0} = \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{(x+\Delta x)-x}$ ซึ่งเป็นผลมาจากการสร้างสถานการณ์ปัญหาให้นักศึกษาได้ลงมือปฏิบัติจริง โดยนักศึกษาใช้การพัฒนาวิธีการคิดจากวิธีการแก้ปัญหาที่ได้ลงมือปฏิบัติไปสู่วิธีการคิดทางคณิตศาสตร์ที่มีความสลับซับซ้อน และเชื่อมโยงวิธีการคิดต่างๆ จากวิธีการคิดหาค่าการเปลี่ยนแปลงเพื่อสร้างวิธีการคิดในการหานิยามของอนุพันธ์ และสร้างแนวคิดในการแก้ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพ อาศัยวิธีการคิดจากรูปและวาดรูปเพื่อหาคำตอบ ทำให้นักศึกษาขยายแนวคิดจากแนวคิดพื้นฐานไปสู่แนวคิดที่แนวคิดที่มีความสลับซับซ้อนขึ้น โดยการต่อยอดจากแนวคิดหรือวิธีการคิดที่มีมาก่อนหน้านี้ในการอธิบายหรือลงมือกระทำเพื่อให้ได้มาซึ่งหลักการ สูตรเกี่ยวกับคณิตศาสตร์

2. การวิเคราะห์สถานการณปัญหาที่ 2 ใครเร็วกว่ากัน

นักศึกษาสามารถเห็นความสัมพันธ์ระหว่าง ความเร็ว กับความเร่ง จากการเริ่มต้นหาความเร็วจากความสัมพันธ์ของระยะทางกับเวลา และพัฒนาต่อยอดไปสู่การหาความเร่งได้ความสัมพันธ์ระหว่างความเร็วกับเวลา ซึ่งเป็นผลมาจากการสร้างสถานการณ์ปัญหาให้นักศึกษาได้ลงมือปฏิบัติจริง โดยนักศึกษาใช้การพัฒนา

วิธีการคิดจากวิธีการแก้ปัญหาที่ได้ลงมือปฏิบัติไปสู่วิธีการคิดทางคณิตศาสตร์ที่มีความสลับซับซ้อน และเชื่อมโยงวิธีการคิดต่างๆ จากวิธีการคิดหาค่าความเร็วเพื่อสร้างวิธีการคิดที่การหาความเร่ง และสร้างแนวคิดในการแก้ปัญหาได้อย่างมีประสิทธิภาพ อาศัยวิธีการแก้ปัญหาวิธีการเดียวไปสู่วิธีการที่หลากหลาย ทำให้นักศึกษาขยายแนวคิดจากแนวคิดพื้นฐานไปสู่แนวคิดที่แนวคิดที่มีความสลับซับซ้อนขึ้น โดยการต่อยอดจากแนวคิดหรือวิธีการคิดที่มีมาก่อนหน้านี้ในการอธิบายหรือลงมือกระทำเพื่อให้ได้มาซึ่งหลักการ สูตร เกี่ยวกับคณิตศาสตร์

การสรุปผลการวิเคราะห์

นักศึกษาใช้การพัฒนาวิธีการคิดจากวิธีการแก้ปัญหาที่ได้ลงมือปฏิบัติไปสู่วิธีการคิดทางคณิตศาสตร์ที่มีความสลับซับซ้อน และเชื่อมโยงวิธีการคิดต่างๆ อาศัยวิธีการแก้ปัญหาวิธีการเดียวไปสู่วิธีการที่หลากหลาย ทำให้นักศึกษาขยายแนวคิดจากแนวคิดพื้นฐานไปสู่แนวคิดที่แนวคิดที่มีความสลับซับซ้อนขึ้น โดยการต่อยอดจากแนวคิดหรือวิธีการคิดที่มีมาก่อนหน้านี้ในการอธิบายหรือลงมือกระทำเพื่อให้ได้มาซึ่งหลักการ สูตร เกี่ยวกับคณิตศาสตร์

การอภิปรายผลการวิจัย

1. วิธีการที่นักศึกษาใช้ การคิดคำนวณกับสื่อการสอนแล้วขยายผลการคิดคำนวณ ใช้วิธีการพิสูจน์เพื่อหาวิธีการและผลลัพธ์ที่ได้ ใช้วิธีการที่หลากหลายเพื่อหาคำตอบ และใช้วิธีการเฉพาะและต่อยอดแนวคิดที่มีอยู่เดิมเพื่อให้ได้มาด้วยวิธีการที่เป็นหลักการทางคณิตศาสตร์

2. แนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่เกิดขึ้น แนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาเริ่มต้นเป็นการคาดเดาหรือจินตนาการผลลัพธ์ที่เกิดขึ้น แนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาเกิดขึ้นจากการต่อยอดและค่อยๆ พัฒนาแนวคิดที่มีอยู่เดิม และแนวคิดทางคณตศาสตร์ของนักศึกษาเกิดขึ้นจากการใช้วิธีการที่หลากหลายและเชื่อมโยงแนวคิดต่างๆ

3. พัฒนาการแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่เกิดขึ้น นักศึกษาพัฒนาการคิดจากการปฏิบัติการกับสื่อมาสู่การคิดเชิงสัญลักษณ์และนำไปสู่กฎ หลักการทางคณิตศาสตร์ในท้ายสุด นักศึกษาเชื่อมโยงวิธีการคิดทางคณิตศาสตร์เพื่อต่อยอดเป็นแนวคิดทางคณิตศาสตร์ที่ถูกพัฒนาขึ้น และนักศึกษาเริ่มต้นจากการคิดพื้นฐานไปสู่การคิดที่มีความสลับซับซ้อนมากขึ้น

การสะท้อนผลการวิจัย

พัฒนาการแนวคิดทางคณิตศาสตร์ของนักศึกษาถูกผลักดันจากการได้ลงมือปฏิบัติการสื่อการสอนที่เป็นรูปธรรมไปสู่กระบวนการคิดเชิงสัญลักษณ์และนำไปสู่การคิดในรูปแบบคณิตศาสตร์ในท้ายสุด สอดคล้องกับงานวิจัยของ Tall (2013) ที่กล่าวถึงการคิดแบบลงมือปฏิบัติ (Practical thinking) เป็นการคิดที่เกิดประสิทธิภาพและนำไปใช้ได้จริงกับทุกสถานการณ์ปัญหา

บรรณานุกรม

ไมตรี อินทร์ประสิทธิ์และคณะ. (2550). **การเตรียมบริบทสำหรับการนำการพัฒนาวิชาชีพครูแบบญี่ปุ่นที่เรียกว่า "การศึกษาชั้นเรียน" (Lesson Study) มาใช้ในประเทศไทย**. เอกสารหลังการประชุมวิชาการระดับชาติครั้งที่ 1. (หน้า 152 -163). กรุงเทพฯ: บริษัท สร้างสื่อ จำกัด.

ไมตรี อินทร์ประสิทธิ์. (2557).

กระทรวงศึกษาธิการ. (2553). **แนวทางการจัดกจิกรรมพัฒนาผู้เรียน : ตามหลักสูตรแกนกลางการศึกษาขั้นพื้นฐาน พุทธศักราช 2551**. พิมพ์ครั้งที่ 2. กรุงเทพมหานคร :โรงพิมพ์ชุนมุม สหกรณ์การเกษตรแห่งประเทศไทยจำกัด.

Becker, J. P., & Shimada, S. (1997). **The Open-Ended Approach: A New Proposal for Teaching Mathematics**. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Isoda, M. & Katagiri, S.(2012). **MATHEMATICAL THINKING How to develop it in the Classroom.** Singapore: World Scientific.

Becker, J. P., & Shimada, S. (1997). The Open-Ended Approach: A New Proposal for Teaching Mathematics. Reston, Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.

Tall, D.O. (2004). **Thinking Through Three Worlds of Mathematics.** Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Bergan, Norway, 4, 281-288. An introduction to the origins and ideas in the three world.

Tall, D.O. (2013). How Humans Learn to Think Mathematically. Cambridge University Press. 457 p.

ไม่มีเนื้อหาจากต้นฉบับ

ไม่มีเนื้อหาจากต้นฉบับ